

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

49e jaargang
1973/1974
no 6
februari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 21,50. Hiervoor wende men zich tot:

Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-130785 en 050-132925.
Tarieven: 1/1 pag. *f* 200,—, 1/2 pag. *f* 110,— en 1/4 pag. *f* 60,—.

Redactieverslag

EUCLIDES – jaargang 48 – 1972/1973

Aan de besturen van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Wiskunde-werkgroep van de WVO

Over de inhoud van deze jaargang vallen geen bijzonderheden te melden. De verdeling van de aantallen pagina's besteed aan de verschillende aspecten – didactiek, methodiek, examenopgaven, wiskunde, rapporten, enz. – wijkt weinig af van die van de vorige jaargang.
De redactie is van mening dat er behoefte is aan meer actualiteit. Zij vraagt zich af of op de min of meer geregelde rubrieken veel prijs wordt gesteld. De interactie met de lezers is op dit punt en eigenlijk in het algemeen veel te gering.
Het spijt de redactie zeer dat bepaalde toegezegde artikelen, in het bijzonder die over het congres te Exeter, niet ontvangen werden.
De voorlichting van de leden binnen de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren door bestuur en commissies laat nog steeds te wensen over.
In het vorige verslag werd de verwachting uitgesproken dat de moeilijkheden ontstaan door de verandering in het drukprocédé dat toegepast wordt bij het tijdschrift, overwonnen zouden zijn. Het bleek helaas niet het geval, hetgeen zich uitte in minder correcte uitvoering en onregelmatigheid in de verschijning van Euclides, ook gedurende het laatste jaar.
De technische problemen lijken nu te zijn opgelost, zodat de redactie vertrouwen heeft t.a.v. deze zaken voor de volgende jaargang.
Amersfoort, 20 september 1973

Namens de redactie
G. Krooshof, voorzitter
A.M. Koldijk, secretaris

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Openingsrede
door de heer Dr. J.K. van den Briel voor de Jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren op zaterdag 27 oktober 1973 te Utrecht.

Dames en heren,
Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren begroet u hier met genoegen op de jaarvergadering van 1973.
Het spreekt haast vanzelf dat ons erelid – Dr. Joh. H. Wansink – aanwezig is; zonder hem zou een jaarvergadering niet compleet zijn. Maar dat ook de heer drs. A.J.S. van Dam hier is doet ons bijzonder veel genoegen. Hartelijk welkom u beiden!
Een speciaal woord van dank tot de sprekers die een uitnodiging van het Bestuur hebben aanvaard. Prof.Dr. Th. Bezembinder zal spreken over het deel van de wiskunde, dat in de sociale faculteiten van de Universiteiten gebruikt wordt, omdat speciaal bij de collega's van het V.W.O. hierover veel te weinig bekend is.
De heer Drs. P. Kalmijn spreekt in de andere bijeenkomst over 'Wiskunde in het dagelijks leven', terwijl om 2 uur Prof.Dr. H.C. Hamaker in de gemeenschappelijke zitting het woord zal voeren over: 'De toepassing van de kansrekening en statistiek bij de beoordeling van kansspelen'.
De samenwerking met de inspecteurs, de heren Drs. B.J. Westerhof, Drs. W.E. de Jong en N.J. Zimmermann, de laatste twee tot ons genoegen hier aanwezig, wordt steeds hartelijker. Deze week is er een gemeenschappelijke vergadering geweest en daar is van beide zijden de wenselijkheid van geregelde contacten uitgesproken.

De firma Wolters-Noordhoff is vertegenwoordigd door de heer Soeteman,
de redaktie van Euclides door de Heer W. Kleijne;

allen hartelijk welkom . . .

Zoals u in ons maandblad hebt kunnen lezen is de heer W. Kleijne de nieuwe redactiesecretaris van Euclides en dat betekent, dat na een 14-jarige periode, de

heer Drs. A.M. Koldijk het secretariaat heeft neergelegd. Op deze plaats past uit naam van het bestuur en de hele Vereniging een bijzonder hartelijk woord van dank aan Albert Koldijk voor hetgeen hij jarenlang in deze drukke en veeleisende functie heeft gedaan.
Ons medebestuurslid Leo Muskens is ziek en ik wil hem namens ons allen van harte beterschap wensen.
Vorig jaar op praktisch dezelfde plaats en tijd verklaarde ik, dat wij, wiskundedocenten bij het voortgezet onderwijs, in een kritieke en belangrijke fase van de reorganisatie van ons wiskundeonderwijs kwamen. Daar zitten we dan nu middenin.
Op de MAVO viel in de lente van dit jaar het tweede eindexamen nieuwe stijl en ik kan wel zeggen dat bijna alle collega's op die scholen het al heel gewoon vinden. De resultaten van het wiskunde-werk waren bevredigend en het schijnt wel dat een groot deel van de MAVO-docenten gewend is aan de nieuwe omstandigheden.
Wel wil het bestuur als zijn mening uitspreken dat het onjuist is en hopelijk niet meer voor zal komen, dat een organisatie van niet-deskundigen op het gebied van het wiskundeonderwijs invloed tracht uit te oefenen op de normering van het eindexamen-werk, en daarin nog slaagt ook! Ook dit jaar zijn weer een groot aantal bijeenkomsten gehouden voor MAVO collega's om het examen en de leerstof te bespreken. Velen hebben in de leiding hiervan meegewerkt: de inspecteur N.J. Zimmerman, bestuursleden, maar ook vele collega's die zich opgegeven hebben als gespreksleiders voor de in totaal 11 bijeenkomsten.
Er ontstaat in onze vereniging meer en meer behoefte aan kader, dat het bestuur behulpzaam is bij de activiteiten van de Vereniging, die zich steeds meer uitbreiden en we zijn erg dankbaar dat voor deze MAVO-bijeenkomsten zovelen buiten het bestuur zich beschikbaar hebben gesteld. In totaal hebben ongeveer 250 collega's deze bijeenkomsten bijgewoond.
Het afgelopen jaar hebben voor het eerst alle HAVO's in Nederland hun eindexamen gehad. Na jaren experimenteren was dit de eerste mogelijkheid om een algemeen oordeel te kunnen krijgen over deze nieuwe school. Dit oordeel in droge cijfers uitgedrukt is niet al te gunstig: bij het centraal schriftelijk eindexamen Wiskunde had 44% der kandidaten onvoldoende (en 23% een 4 of minder!).
Waarschijnlijk zijn de resultaten van het schoolonderzoek wel beter geweest, zodat de eindcijfers niet al te ongunstig uitvielen en 87% der kandidaten geslaagd is. Toch mag die 44% niet uit onze aandacht verdwijnen. De vrij algemene mening was dat het eindexamen-werk van een behoorlijk niveau was, zonder te moeilijk te zijn.
Laten we nuchter zijn en bedenken dat het HAVO zijn plaats in onze Nederlandse samenleving nog moet vinden en misschien verdienen. Het hoger beroepsonderwijs zal nauwlettend het peil van de resultaten van het HAVO gade slaan en eventueel conclusies gaan trekken. Voor ons wiskunde-docenten is vooral de H.T.S. van belang en deze school zal zijn eisen niet laag stellen.
Al deze facetten zullen een rol moeten spelen bij de overwegingen of het niveau van het eindexamen (misschien moeten we dit vaksgewijze bekijken!) voldoende is of veranderd moet worden. Het is zeker dat wij na één keer landelijk eind-

examen over deze HAVO geen oordeel kunnen geven, maar nuchterheid, een kritische opstelling en rekening houden met de eisen en verzoeken van de maatschappij en van de scholen die onze eindexamenkandidaten opnemen, zijn dringend noodzakelijk.
De Vereniging als zodanig neemt over het noodzakelijke niveau van het eindexamen wiskunde van het HAVO nog geen standpunt in door gebrek aan gegevens, al zijn wij wel van mening, dat het HAVO een school moet zijn, die het waard is bezocht te worden door de meer dan middelmatige leerlingen.
In het begin van de afgelopen cursus zijn er door de Vereniging weer een aantal bijeenkomsten georganiseerd (5 in totaal), waar de experimentexamens voor het HAVO werden besproken en door de Inspectie vragen beantwoord werden over leerstof en examenregeling. Steeds weer bleek, dat deze bijeenkomsten broodnodig waren en precies hetzelfde kan gezegd worden van overeenkomstige vergaderingen voor het V.W.O.
Na de ervaringen opgedaan in de 17 bijeenkomsten door de Inspectie eind vorig jaar georganiseerd, heeft de Vereniging, op verzoek van deze Inspectie, ook deze cursus een aantal (nl. 5) vergaderingen, speciaal gewijd aan V.W.O. leerstof en eindexamen, belegd.
Nu nog kwam in een aantal ervan een grote onzekerheid van sommige collega's tot uiting, waar in het belang van het wiskundeonderwijs op het V.W.O. ernstig aandacht zal moeten worden besteed en deze onzekerheid zal door goede voorlichting en didaktische begeleiding opgeheven moeten worden.
Als algemene indruk blijft dat voor een groot aantal wiskundecollega's het in versneld tempo en zonder voldoende voorbereiding opleggen van weer een verandering, of het nu een nieuwe organisatievorm (de middenschool!), een nieuwe didaktiek of een nieuwe leerstofinhoud is, funest zou werken.
Vaststaat dat bij de Mammoet-reorganisatie deze voorbereiding niet voldoende doorgekomen is, speciaal bij HAVO en V.W.O. Dat zal in de toekomst beslist niet meer mogen gebeuren maar als de huidige minister over experimenteren spreekt, dan hebben wij, wiskundigen, van onze neven – de natuurkundigen – toch wel een andere indruk van goede experimenten gekregen, dan we meestal van onderwijskundigen – al of niet hooggeleerden – nu krijgen. De Vereniging zal zich, weer door gebrek aan gegevens, niet uitspreken over de in de lucht hangende z.g. nieuwe onderwijsvernieuwing, maar een stellingname tegen experimenten, waarvan het uitgangspunt een dogma is, is wel gewenst.
Volledigheidshalve wil ik er wel aan toevoegen dat minister Van Kemenade bij een onderhoud dat het dagelijks bestuur van de C.M.L.W. met hem had, verklaarde te beseffen dat hij niet overhaast kon optreden!
Het werk van de Centrale Commissie voor Begeleiding MAVO Wiskunde, zal helaas voor het MAVO van minder belang worden, maar zal sterk uitgebreid worden tot het Lager Beroeps Onderwijs, waar begeleiding van de docenten, die wiskunde geven, bijzonder nodig is.
De Opgavencommissie en de Nomenclatuurcommissie van de Vereniging hebben hun werk voorlopig beëindigd, maar na enige jaren van stille voorbereiding is nu de Didaktiekommissie met grote schreden voor het voetlicht gekomen.

Vorig jaar sprak ik er nog over dat vermoedelijk in de maand februari 1973 een tweedaagse conferentie georganiseerd zou worden waar aan de hand van een publicatie van Drs. J. van Dormolen door de deelnemers geoefend zou worden in problemen, verband houdend met de didaktiek van de wiskunde.
Op dit moment zijn twee van deze conferenties gehouden en zijn er in de naaste toekomst nog twee vastgesteld, met totaal ± 200 deelnemers. Alle vier hebben praktisch hetzelfde programma en de deelnemers komen van zeer verschillende vormen van voortgezet onderwijs. Het enthousiasme na de reeds gehouden bijeenkomsten was zo groot, dat door de deelnemers om een vervolg-cursus werd verzocht, welke op 15, 16 en 17 oktober voor 50 docenten gehouden werd, eveneens met veel succes.
De beide eerste cursussen zijn voor het grootste deel door de Vereniging gefinancierd, maar de C.M.L.W. heeft de financiële en administratieve regeling van de daaropvolgende op zich genomen.
Namens de Vereniging kan ik niet genoeg mijn dank en waardering uitspreken voor deze samenwerking, waardoor de Vereniging zich kan concentreren op de didaktische inhoud van de conferenties. Dat deze zo'n succes zijn geworden, komt door de vele groepsleiders die er geheel belangeloos aan hebben meegewerkt, maar vooral door het bijzondere enthousiasme en de werkkracht van Joop van Dormolen en Harrie Broekman, die deze bijeenkomsten dragen.
Ik wees al op het kader dat de Vereniging nodig heeft en ook hier is nu kader gevormd dat in de toekomst zeker nodig is. 't Is de stellige overtuiging van het bestuur, dat de Vereniging meer van deze korte, didaktische cursussen zal moeten gaan organiseren omdat er, zoals blijkt, een dringende behoefte aan is. Bijzonder belangrijk is dat de leiding van deze cursussen in handen is van mensen uit de praktijk en niet van theoretici, die het dagelijks werk niet of niet voldoende kennen.
Even belangrijk is, dat deze cursussen gezamenlijk door collega's van V.W.O. HAVO, MAVO en L.B.O. gevolgd werden, terwijl de verschillende herkomst van de docenten van deze schooltypen in het samenwerken nauwelijks gemerkt wordt en volslagen onbelangrijk is.
Juist om deze redenen zal de gegroeide samenwerking met de C.M.L.W. in de toekomst van veel belang zijn. Hoe men er ook vroeger over dacht, tegenwoordig zijn we het er toch wel over eens, dat cursussen didaktiek noodzakelijk zijn (mits ze op de praktijk zijn ingesteld) en dat C.M.L.W. en de Vereniging hiervoor moeten zorgen. En dat geldt zeker voor het geval er weer een verandering zou komen, waar binnenskamers wel voorzichtig aan wordt gewerkt.
Er is n.l. een subcommissie Speciale Onderwerpen van de C.M.L.W. opgericht, die onderzoekt of de indeling WI en WII in de bovenbouw van het V.W.O. wel gehandhaafd moet blijven. Een der oorzaken van het oprichten van deze subcommissie was de moeilijkheid, dat vele A-leerlingen WI in hun pakket opnamen, omdat ze in één der sociale wetenschappen wilden gaan studeren.
Over deze zaak heeft het Bestuur een brief aan de Minister gezonden, waarop geantwoord is, dat deze kwestie op het departement en in de Academische Raad nader bekeken wordt.

Wat betreft die nieuwe indeling van de stof over WI en WII kan ik garanderen, dat dit niet op zeer korte termijn zal geschieden en dat uitgebreid overleg gepleegd zal worden met de betrokken organisaties en in het bijzonder ook met u allen, de leden van onze Vereniging, die er het nauwst bij betrokken zijn.
Nu met ingang van de cursus 1974/1975 bij de WI in de 5e en 6e klasse V.W.O. ook de Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek gegeven zal moeten worden – misschien is te overwegen of de invoering niet in enige fasen kan – wil het Bestuur, mede namens de C.M.L.W. er nogmaals met de meeste aandrang de aandacht op vestigen dat 4 uren per week WI in 5 èn in 6 V.W.O. noodzakelijk zijn. De collega's die hier niet over kunnen beschikken moeten er bij hun schoolleiding op aandringen, dat ze dit aantal: 4-4 krijgen, hetgeen voor de ruimte in de 30 uren per week in deze klassen geen probleem hoeft te geven.
Het blad Pythagoras heeft nog steeds een gezond leven, evenals de Wiskunde Olympiade. Hetzelfde geldt voor de leesportefeuille voor de leden, waar Dr. A.W.J.M. Smeur nog steeds zijn zeer gewaardeerde krachten aan geeft.
Het jaar dat voor ons ligt, zal door verschillende collega's verschillend worden beoordeeld: voor die van het MAVO als een jaar waar de inhoud van de leerstof misschien wat minder aandacht hoeft te krijgen en men zich gelukkig wat meer kan concentreren op de manier waarop; voor die van het HAVO als het jaar, waarin de ervaringen van het eerste eindexamenjaar behulpzaam zijn bij de tweede keer; voor die van het V.W.O. komt het zware en onzekere jaar van het eerste eindexamen – veel sterkte gewenst – en voor die van het L.B.O., waar onze aandacht toch ook heen gaat, komt een moeilijke tijd, daar de reorganisatie hier beslist te weinig is voorbereid.
Ons wiskunde-onderwijs verandert nog steeds, daar is geen bezwaar tegen, zolang wij als wiskunde-docenten deze veranderingen mede dirigeren en beheersen en de zo noodzakelijke nuchtere correcties, ingegeven door de praktijk, kunnen aanbrengen.
Hierbij verklaar ik de Jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, die op dit moment 1832 leden heeft, voor geopend.

Spaces, functions, polygons, and Pascal's triangle [1]

LARS C. JANSSON
The Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania

Two recent trends in the teaching of mathematics can often go hand in hand. These two are the spiral approach to content development and the discovery-teaching/learning method. This paper will present some topics that illustrate how these approaches to content and method may complement each other. Space will not permit the full explication as it might occur in a classroom, but it is hoped that both the discovery approach to mathematical conjecture as well as the spiral nature of the topics will be evident. The specific topics discussed here range from those for the upper elementary school pupil to those for the high school senior – the exact placement depends not only on the topic itself, but on the language and notation as well.

In geometry classes we often discuss the number of lines determined by a given number of points in the plane and the number of divisions of the plane determined by those lines. Polya presents an excellent illustration of reasoning by analogy based on this problem (Polya 1954, pp. 43-52). First, the subdivisions of the plane by lines is discussed and then the subdivision of space by planes. Beginning with simple examples, tables of numbers are kept until a conjecture can be made about the relationships between (1) the number of points on a line, n, and the subdivisions of the line, $n + 1$; and (2) the number of portions into which a plane is divided by n straight lines in general position: $1 + n + n(n - 1)/2$.

Some Initial Conjectures

Rereading Polya's discussion recently, the author was reminded of a geometry lesson observed in a tenth-grade class several years ago. The Pascal triangle as it appears in figure 1 (without the arrows) was on the board.

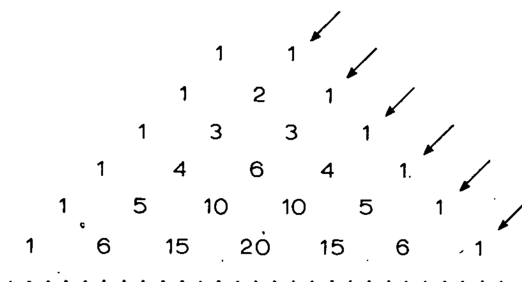


Fig. 1. The Pascal triangle. The arrows indicate 'diagonals.'

[1] Reprinted from the *Mathematics Teacher*, January 1973, (Vol. 66, pp. 71-77), © 1973 by the National Council of Teachers of Mathematics. Used by permission.

The students had been discussing such questions as those noted by Polya when someone observed that the second 'diagonal' (indicated by the second arrow from the top in fig. 1) gives the number of lines determined by n points, where n is given by the first diagonal. Thus three points determine three lines, whereas four points determine six lines (reading across row 4 to the second diagonal). Of course it was agreed that no three points could be collinear. It was then seen that the same rule works for $n = 5$ as shown in figure 2, namely, that we have ten distinct lines. On further observation and consideration, it appears that this conjecture is a reasonable one, since this diagonal of the triangle is $\binom{n}{2}$. That is, since two points determine a line, the points are taken two at a time and $\binom{n}{2}$ gives us this count, the order of the points being immaterial. Thus four points taken two at a time give $\binom{4}{2} = 6$ distinct lines. The class omitted this formal discussion and soon wanted to know whether the other diagonals of the Pascal triangle had similar geometric interpretations.

Several approaches to this question will be examined here, first the one closest to that suggested by the students' original observations. (It will become evident, however, that this is not the simplest approach.)

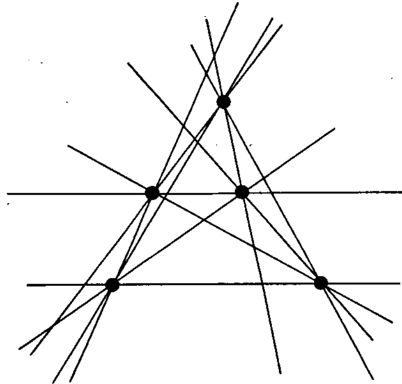


Fig. 2. Five points (not necessarily coplanar) determine ten distinct lines, provided no three points are collinear.

The Leap into Space

The analogy that permitted the leap from points to lines was made by the class. By a similar analogy, the next step is clearly from lines to planes or points to planes. The choice will be shown by the development to be arbitrary – the only difference is in the simplicity of the language. Given the triangle and its rows named by n, where n represents the number of given points, the latter relationship based on points will be used. How many points determine a plane? Three. Given three points, it is immediately obvious in the triangle that the third diagonal contains a 1. Given four points (now with a noncoplanar rather than noncollinear condition) taken three at a time, it becomes evident that four distinct planes are determined

(see fig. 3). This all seems very reasonable when we realize that the third diagonal is the sequence $\left\{\binom{n}{3}\right\}, n = 3, 4, 5, \cdots$

The next jump requires more imagination, but it is not yet totally abstract. Looking at the triangle, it is clear that we must have at least four points if the fourth diagonal is to have any meaning similar to the preceding ones. The simplest analogous figure beyond the plane (triangle) is the tetrahedron. Just as the plane required three points, the tetrahedron is determined by four, as shown in figure 3. If the tetrahedron is given by the four points A_0, A_1, A_2, and A_3, we can define the *3-space* $A_0A_1A_2A_3$ as the set of all points collinear with pairs of points in one or two faces of the tetrahedron $A_0A_1A_2A_3$. The actuality of this definition is more easily realized by considering the analogous definition for a plane: 'If *A, B, C* are three noncollinear points, the *plane ABC* is the set of all points collinear with pairs of points on one or two sides of the triangle *ABC*' (Coxeter 1969, pp. 183–86). A three-dimensional model of a tetrahedron and a drawing of a triangle, respectively, will aid in visualizing these situations.

Each time we have increased the dimension, it has been necessary to postulate the existence of a point in a space of the next higher dimension. Thus in going from a line to a plane, a noncollinear third point was required. Similarly, in moving from the plane to a 3-space, it was necessary to have a fourth point not in the plane. In order to continue our analogy, we postulate the existence of a fifth point not in our 3-space.

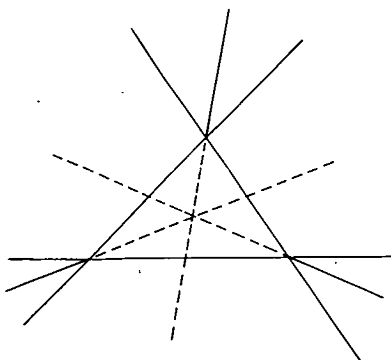


Fig. 3. Four points determine a tetrahedron or a 3-space, provided they are not coplanar.

Thus three points determine a 2-space (plane) and four points determine a 3-space. In general, n points determine an $(n - 1)$-space. Returning then to Pascal's triangle, five given points determine ten lines, ten planes, five tetrahedra, and, now, one 4-space. Such a set of points, say $A_0A_1A_2A_3A_4$, is a *simplex*. Note that this simplex contains five vertices A_i; ten edges A_iA_j, $i < j$; ten faces $A_iA_jA_k$, $i < j < k$; and five cells, $A_iA_jA_kA_l$, which are tetrahedral regions. This is precisely row 5 of the Pascal triangle. The 4-space thus determined is the set of points collinear with pairs of points in one or two cells of the simplex. At this point in our development we have become completely abstract!

Clearly the above discussion can be extended to n dimensions (using mathematical induction). The number of vertices (points), edges (lines), faces (planes), and simplexes determined by n points (satisfying a modified noncollinearity condition) is

given by the corresponding row and diagonal of the Pascal triangle. The general statement is as follows:

Generalization 1: *Given n points in real (n − 1)-space, row n and diagonal m of the Pascal triangle gives the number of (m − 1)-space determined by the n points taken m at a time.*

This information is summarized in figure 4. Note, for example, that six points determine fifteen straight lines and six 4-spaces.

As the preceding discussion progressed and became more abstrct, it became increasingly necessary to introduce some new terminology. The conventional words have been employed here, but students can invent their own terms. If this is all too abstract, a different tack can be taken by restricting the extensions to two dimensions. Two such directions will be suggested here, the more general first.

```
                    1   1      1- vertices (points)
                  1   2   1      2- edges (lines)
                1   3   3   1      3- faces (planes)
              1   4   6   4   1      4- 3-spaces(tetrahedra)
            1   5  10  10   5   1      5- 4-spaces
          1   6  15  20  15   6   1      6- 5-spaces
          . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
```

Fig. 4. The Pascal triangle. Summary of the extension of dimensions approach.

Polynomial Functions

We return again to figure 1 and the second diagonal of the triangle. Remember that this was interpreted as giving the number of lines or linear functions determined by taking pairs of points from among a set of n points such that no three were collinear. In this new approach, all points will be restricted to the plane, which will be considered as $R \times R$, the Cartesian plane. Note, however, that given three points, we can determine not only three lines, but also a parabola or quadratic function in one variable. Such a quadratic polynomial function is of the form $ax^2 + bx + c$. A particular polynomial is determined by the values of the coefficients of each power of the variable and the constant term. Thus, since the quadratic has three such values, three points or ordered pairs are required in order to obtain three simultaneous linear equations in a, b, and c of the form $ax^2 + bx + c = y$.

Since each quadratic requires three points for its determination, how many quadratics are given by four points? Reasoning by analogy, is it true that four points determine four quadratic functions? And five points, ten quadratic functions? It takes three points to determine such a function, and since we already know that the diagonal is the sequence $\left\{\binom{n}{3}\right\}$, $n = 3, 4, 5, \ldots$, it becomes obvious that this diagonal gives the number of quadratics given by n points. Figure 5 shows four quadratics given by four points.

Y

X

Fig. 5. In the cartesian plane, four quadratics are determined by four points, no three of which are collinear.

We know that two points determine a line and that three points determine a quadratic. Similarly, four points determine a cubic, and so on. Thus five points determine ten linear functions, ten quadratic functions, five cubics, and one quartic. We may now write as follows:

Generalization 2: *Given n points in the real plane, row n and diagonal m of algebraic polynomial functions in one variable of degree m − 1 determined by the n points taken m at a time.*

In order that none of these $\binom{n}{m}$ polynomials be degenerate (i.e., with $a_n = 0$, where a_n is the coefficient of the $m - 1$ degree term), no m of the n given points may satisfy a polynomial of degree less than or equal to $m - 2$. This corresponds to the earlier noncollinearity condition. A simple example will illustrate this: Given four (n) points in the plane, three (m) of them will determine a nondegenerate quadratic (degree $m - 1$) polynomial as long as they do not also lie on the graph of a linear (degree $m - 2$) function. This approach is summarized in figure 6.

1-points
2-linear functions (1st degree)
3-quadratics (2d degree)
4-cubics (3d degree)
5-quartics (4th degree)
6-quintics (5th degree)

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
. . . .

Fig. 6. The Pascal triangle. Summary of the polynomial function approach.

Convex Polygons

The third approach to geometric interpretations of the diagonals of the Pascal triangle is perhaps the simplest, although in some senses the least general. In this case we are again in two-dimensional space; the only further restriction is that the *n* given points be vertices of a convex polygon. These polygons (see fig. 7) need not be regular. The counting problem in this instance is the number of segments, triangles, quadrilaterals, and so on formed by the diagonals and vertices of the polygon. Again we are looking at two, three, four, . . . points taken a time from *n* given points. Consider the pentagon (fig. 7c), which contains the following figures:

Figure		*Number of Figures*
points	A_1, A_2, A_3, A_4, A_5	5
segments	A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_1A_2, A_2A_3, A_2A_3, A_2A_5, A_3A_4, A_3A_5, A_4A_5	10
triangles	$A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_5$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_3A_5$, $A_2A_4A_5$, $A_2A_3A_4$, $A_2A_3A_5$, $A_2A_4A_5$, $A_3A_4A_5$	10
quadrilaterals	$A_1A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_3A_5$, $A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_3A_4A_5$, $A_1A_2A_4A_5$	5
pentagons	$A_1A_2A_3A_4A_5$	1

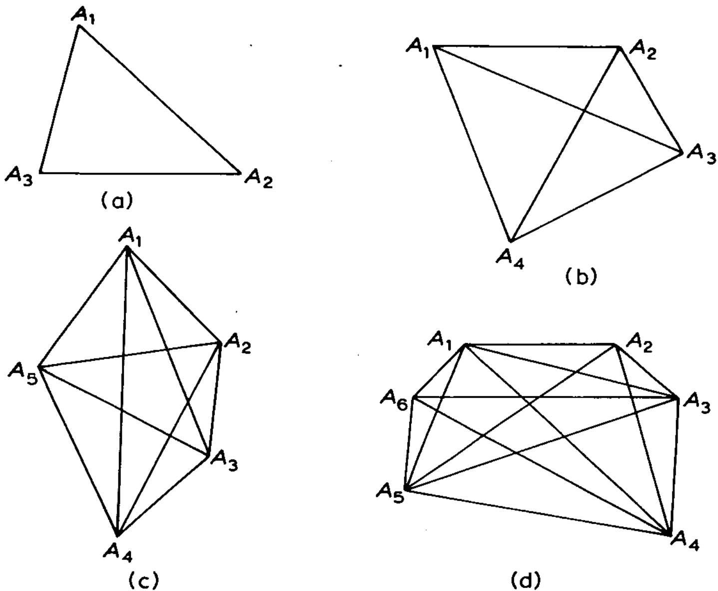


Fig. 7. Convex polygons with diagonals.

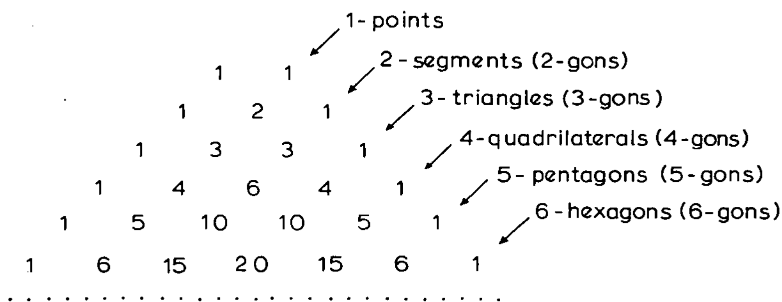


Fig. 8. The Pascal triangle. Summary of the convex-polygon approach.

See figure 8 for the summarized Pascal triangle for n-gons. The general case may now be stated:

Generalization 3: *Given n points in the plane forming the vertices of a convex polygon, row n and diagonal m of the Pascal triangle gives the number of m-gons determined by those points (and the segments joining them).*[1]

Thus in the Pascal triangle we see that for six given points, fifteen segments and six pentagons are formed.

Discussion

Three geometric interpretations have been given to the 'diagonals' of the Pascal triangle. With the exception of the more abstract notions, this material can be discovered by students with proper questioning. None of it requires previous understanding of the triangle, and may, in fact, be developed before the triangle itself is presented. The triangle may be a summary-and-generalizing device or a starting point, with the levels of geometric abstraction varied according to the group. These approaches (or others) suggest the spiral features for both the Pascal triangle (as a representative of counting problems) and the geometric concepts, in addition to encouraging conjecturing.
These examples from elementary geometry are just a few of those that could be examinated. The interested reader might try to relate these examples through analogy to the three-dimensional Pascal pyramid suggested by Basil in an earlier issue of the *Mathematics Teacher* (see Basil 1968).

References

Basil, Sister Mary. 'Pascal's Pyramid.' *Mathematics Teacher 61* (January 1968): 19-21.
Coxeter, H. S. M. *Introduction to Geometry*. New York: John Wiley & Sons, 1969.
Polya, G. *Mathematics and Plausible Reasoning:* Vol. 1, *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1954.

[1] The symmetry of language breaks down at this point. It takes m points to determine an $(m - 1)$-dimensional space, an $(m - 1)$-degree polynomial, and an m-gon. Thus, as long as we are clear what it is we are counting, there is no difficulty.

Over het aantal afbeeldingen van V op W.

Dr. W. BURGERS

Wassenaar

Is $\# V = n$ en $\# W = k$, dan stellen we het aantal afbeeldingen van V òp W voor door A_k^n.
Is $n < k$ dan is $A_k^n = o$, is $n = k$ dan is $A_k^n = k!$
Voorlopig onderstellen we $n \geqslant k$.
We zullen eerst een methode bespreken om A_k^n in concrete gevallen te berekenen.
Deze methode suggereert een andere aanpak, waardoor het mogelijk wordt algemene formules van A_k^n af te leiden.
Deze afleiding resulteert dan weer in een methode om nog sneller dan eerst series A_k^n te berekenen in concrete gevallen.

1. Nemen we als voorbeeld A_3^5.
Met (3 1 1) bedoelen we de afbeeldingen waarbij één element van W drie originelen heeft in V.
In W gezien geeft dit drie mogelijkheden, n.l. het aantal permutaties van drie elementen met twee gelijke.
In V gezien geeft dit twintig mogelijkheden n.l. het aantal permutaties van vijf elementen met drie gelijke.
Zodat $(3\ 1\ 1) = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{5!}{3!} = 60$
Andere afbeeldingen zijn $(2\ 2\ 1) = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{5!}{2!2!} = 90$

Zodat $A_3^5 = 150$.
Zo vindt men:

$$A_3^6 = (4\ 1\ 1) + (3\ 2\ 1) + (2\ 2\ 2) =$$

$$= \frac{3!}{2!} \cdot \frac{6!}{4!} + 3! \frac{6!}{3!2!} + \frac{3!}{3!} \cdot \frac{6!}{2!2!2!} =$$

$$= 90 + 360 + 90 = 540$$

$$A_2^3 = (2\ 1) = 2! \frac{3!}{2!} = 6,\ A_2^4 = (3\ 1) + (2\ 2) = 2! \frac{4!}{3!} + \frac{2!}{2!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = 14$$

$A_4^8 = (5111) + (4211) + (3311) + (3221) + (2222) = 40.824$
$A_4^9 = (6111) + (5211) + (4311) + (4221) + (3321) + (3222) = 186.480$
$A_4^{10} = 818.520$, $A_3^9 = 18.150$.

2. Zoals we reeds opmerkten suggereert deze methode een algemene aanpak. Bepalen we eens A_2^n, $n \geqslant 2$.
Letten we nu op:

$$(a+b)^n = a^n + [C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b + \ldots + C_{n-1}^n ab^{n-1}] + b^n.$$

Blijkbaar is A_2^n gelijk aan de som van de coëfficiënten van de termen die zowel de factor a als b bevatten. Deze vindt men alleen binnen de vierkante haken.
Zodat $A_2^n = 2^n - 2$

We zullen nu zien dat de weg vrij is voor de volgende stappen. Nemen we A_3^n.
We zullen A_3^n op twee manieren berekenen en dan de beste kiezen om verder te gaan.
We gaan nu uit van $(a + b + c)^n$.

$$(a+b+c)^n = a^n + C_1^n a^{n-1} S_2 + [C_2^n a^{n-2} S_2^2 + \ldots + C_{n-1}^n a S_2^{n-1}] + S_2^n \ldots + 1.$$

Hierin is $S_2 = b + c$.
We bepalen nu de som van de coëfficiënten van de termen die *niet* de factoren a en b en c bevatten, dus het aantal afbeeldingen van V *in* W.
Dit aantal is blijkbaar

$$1 + 2C_1^n + [2C_2^n + \ldots + 2C_{n-1}^n] + 2^n = 2(1 + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n) + 2^n - 3 = 3.2^n - 3.$$

zodat $A_3^n = 3^n - 3.2^n + 3$.
Controle: $A_3^5 = 3^5 - 3.2^5 + 3 = 150$.
Het blijkt nu dat het prettiger is A_3^n direct te bepalen.
We dienen dan de som te nemen van de coëfficiënten van de termen die wèl de drie factoren a, b en c bevatten.
Deze termen komen alléén voor in de veelterm die bij (1) tussen haken geschreven staat.
Nu is $S_2^2 = b^2 + 2bc + c^2$. Bruikbaar is alleen $2bc$, het bruikbaar aantal dus $A_2^2 = 2$
$S_2^3 = b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$. Bruikbaar aantal $A_2^3 = 3 + 3$.
Totaal dus

$$C_2^n A_2^2 + C_3^n A_2^3 + \ldots + C_{n-1}^n A_2^{n-1}.$$

We maken nu dankbaar gebruik van A_2^n en vinden:

$$A_3^n = C_2^n (2^2 - 2) + C_3^n (2^3 - 2) + \ldots + C_{n-1}^n (2^{n-1} - 2).$$

Neem nu in (1): $a = b = c = 1$. Dit geeft:

$$\begin{array}{rl|l} & 3^n = 1 + 2C_1^n + [C_2^n\, 2^2 + C_3^n\, 2^3 + \ldots + C_{n-1}^n\, 2^{n-1}] + 2^n & 1 \\ a=b=1, c=0: & 2^n = 1 + C_1^n + [C_2^n + C_3^n + \ldots + C_{n-1}^n] + 1 & 2 \\ \hline & 3^n - 2.2^n = C_2^n(2^2-2) + C_3^n(2^3-2) + \ldots + C_{n-1}^n(2^{n-1}-2) + 2^n - 3 & \\ & 3^n - 3.2^n + 3 = A_3^n. & \end{array}$$

Tevens geldt: $3! = 3^3 - 3.2^3 + 3$.

Letten we op de gevonden resultaten:

$A_2^n = 1.2^n - 2.1^n + 1.0^n$	coëfficiënten	1		−2		(1)
$A_3^n = 1.3^n - 3.2^n + 3.1^n - 1.0^n$		1	−3		+3	(1)

dan rijst het vermoeden dat:

$A_4^n = 1.4^n - 4.3^n + 6.2^n - 4$	1	−4	6	−4	(1)

Bovendien lijkt het, alsof een volledige inductie mogelijk is. Het blijkt dat we dan nog één barriere zullen moeten overwinnen. Laten we daarom A_4^n bepalen.

We gaan dus nu uit van $(a + b + c + d)^n$.

$$(a+b+c+d)^n = a^n + C_1^n a^{n-1} S_3 + C_2^n a^{n-2} S_3^2 + \\ + [C_3^n a^{n-3} S_3^3 + \ldots + C_{n-1}^n S_3^{n-1}] + S_3^n \ldots (2)$$

waarbij $S_3 = b + c + d$.
We nemen de som van de coëfficiënten van de termen die de vier factoren a, b, c en d bevatten.
Blijkbaar is $A_4^n = C_3^n\, A_3^3 + C_4^n\, A_3^4 + \ldots + C_{n-1}^n\, A_3^{n-1}$.
Substitueren we het resultaat $A_3^n = 3^n - 3.2^n + 3$ dan vinden we:

$$A_4^n = [C_3^n\, 3^3 + C_4^n\, 3^4 + \ldots + C_{n-1}^n\, 3^{n-1}] - 3\,[C_3^n\, 2^3 + \ldots + C_{n-1}^n\, 2^{n-1}] + \\ + 3\,[C_3^n + \ldots + C_{n-1}^n].$$

$a = b = c = d = 1$.

$$\begin{array}{rl|l|l|l} & 4^n = 1 + & C_1^n.3 + C_2^n.3^2 & +[C_3^n.3^3 + \ldots + C_{n-1}^n 3^{n-1}] + 3^n & 1 \\ a=b=c=1, d=0 & 3^n = 1 + & C_1^n.2 + C_2^n.2^2 & +[C_3^n.2^3 + \ldots + C_{n-1}^n 2^{n-1}] + 2^n & -3 \\ a=b=1, c=d=0 & 2^n = 1 + & C_1^n + C_2^n & +[C_3^n + \ldots + C_{n-1}^n] + 1 & 3 \\ \hline & & & & + \end{array}$$

$$4^n - 3.3^n + 3.2^n = 1 + C_1^n(1.3 - 3.2 + 3) + C_2^n(1.3^2 - 3.2^2 + 3) + A_4^n + 3^n - 3.2^n + 3.$$

Nu is $1.3 - 3.2 + 3.1 = 0$, $1.3^2 - 3.2^2 + 3.1^2 = 0$
zodat $A_4^n = 4^n - 4.3^n + 6.2^n - 4$
en tevens $4! = 4^4 - 4.3^4 + 6.2^4 - 4$.
Blijft over het probleem of de termen tussen de stippellijnen in alle gevallen de som 0 hebben.
Alvorens deze sprong te wagen gaan we dit na met de binomiaalcoëfficiënten van $(a + b)^4$ en $(a + b)^5$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \times \\ \hline \end{array}$$
$1.4 - 4.3 + 6.2 - 4.1 = 0$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \times \\ \hline \end{array}$$
$1.4^2 - 4.3^2 + 6.2^2 - 4.1^2 = 0$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \times \\ \hline \end{array}$$
$1.4^3 - 4.3^3 + 6.2^3 - 4.1^3 = 0$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \times \\ \hline \end{array}$$
$1.4^4 - 4.3^4 + 6.2^4 - 4 = 4!$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \times \\ \hline \end{array}$$
$1.5 - 5.4 + 10.3 - 10.2 + 5.1 = 0$

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \times \\ \hline \end{array}$$
$1.5^2 - 5.4^2 + 10.3^2 - 10.2^2 + 5.1^2 = 0$

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \times \\ \hline \end{array}$$
$1.5^3 - 5.4^3 + 10.3^3 - 10.2^3 + 5.1^3 = 0$

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \times \\ \hline \end{array}$$
$1.5^4 - 5.4^4 + 10.3^4 - 10.2^4 + 5.1^4 = 0$

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \times \\ \hline \end{array}$$
$1.5^5 - 5.4^5 + 10.3^5 - 10.2^5 + 5 = 5!$

Het is te verwachten dat dit algemeen geldt. De uitdrukking:

$1.4^2 - 4.3^2 + 6.2^2 - 4$ is n.l. A_4^2 en die is 0 en
$1.4^3 - 4.3^3 + 6.2^3 - 4$ is n.l. A_4^3 en die is 0.

Indien we uitgaan van $f(x) = (x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$
dan is

$xf' = 1.4x^4 - 4.3x^3 + 6.2x^2 - 4x,$ $\qquad f' = 4(x - 1)^3$
$x = 1 \Rightarrow 1.4 - 4.3 + 6.2 - 4 = 0$ want $f'(1) = 0$
$x(xf')^1 = xf^1 + x^2 f'' = 1.4^2x^4 - 4.3^2x^3 + 6.2^2x^2 - 4x, f'' = 4.3(x - 1)^2$
$x = 1 \Rightarrow 1.4^2 - 4.3^2 + 6.2^2 - 4 = 0$ want $f'(1) = f''(1) = 0$
$x(xf' + x^2f'')^1 = xf' + 3f''x + f'''x^2 = 1.4^3x^4 - 4.3^3x^3 + 6.2^3x^2 - 4x,$
$f''' = 4.3.2(x - 1)$
$x = 1 \Rightarrow 1.4^3 - 4.3^3 + 6.2^3 - 4 = 0$ want $f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0$
$f^{IV} = 4!$ f^{V} e.v. zijn 0.

Herhaalt men dit nog één keer dan verschijnt in het linkerdeel naast f', f'', f''' ook f^{IV}, maar $f^{IV} = 4!$
zodat $1.4^4 - 4.3^4 + 6.2^4 - 4 = 4!$
Gaat men dus uit van $(x-1)^n$ dan zijn de afgeleiden tot en met de $(n-1)$ste allemaal 0 voor $x = 1$, de n^{de} is echter $n!$
Hiermede is het pad voor een volledige inductie geheel vrij gemaakt zodat:

$$A_k^n = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_i^k (k-i)^n$$

$$\text{en } n! = \sum_{n=0}^{n-1} (-1)^n C_i^n (n-i)^n$$

Is $n < k$ dan is $A_k^n = 0$.

3. Beschouw de rij functies $f_0, f_1, f_2 \ldots f_n \ldots$, alle differentieerbaar.

$$\underset{c \in \mathbb{N}}{\forall} : f_i = xf'_{i-1}$$

dan is f_i een veelterm in $xf'_0, x^2f''_0, x^3f'''_0 \ldots x^nf_0^{(n)}$ de coëfficiënten van deze veelterm zijn eenvoudig te berekenen (zie tabel).

We lichten dit met een voorbeeld toe en nemen de 3de kolom.

$$f = (x-1)^3, f' = 3(x-1)^2, f'' = 3!\,(x-1), f''' = 3!$$

1° stap $xf' = 3x^3 - 3.2x^2 + 3x$, $x = 1 \Rightarrow A_3^1 = 0$
2° stap $xf' + f''x^2 = 3^2x^3 - 3.2^2x^2 + 3x$, $x = 1 \Rightarrow A_3^2 = 0$
3° stap $xf' + a_{32}f''x^2 + a_{33}f'''x^3$ $x = 1$ $3^3 - 3.2^3 + 3 = A_3^3$

$$\begin{array}{lccc} x=1 & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 0 & a_{33}.3! \end{array}$$

dus $a_{33}.3! = A_3^3$
4° stap $xf' + a_{42}f'' + a_{43}f'''x^3 + a_{44}f^{IV}x^4$ $x = 1$ $3^4 - 3.2^4 + 3 = A_3^4$

$$\begin{array}{lcccc} x=1 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 0 & a_{43}.3! & 0 \end{array}$$

dus $a_{43}.3! = A_3^4$
5° stap $xf' + a_{52}f''x^2 + a_{53}f'''x^3 + a_{54}f^{IV}x^4 + a_{55}f^{V}x^5$ $x = 1 \rightarrow 3^5 - 3.2^5 + 3 = A_3^5$

$$\begin{array}{lccccc} x=1 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 0 & a_{53}.3! & 0 & 0 \end{array}$$

$a_{53}.3! = A_3^5$
Algemeen $a_{n3}.3! = A_3^n$

Uitgaande van $(x - 1)^n$ dus: $a_{nk}k! = A_k^n$ en tevens $l[A_l^k + A_{l-1}^k] = A_l^{k+1}$, daar $la_{kl} + a_{kl-1} = a_{k+1l}$

gebruikt men de coëfficiënten a_{nk} dan vindt men:

$A_3^3 = 3!$

$A_3^4 = 6.3! = 36$ $\quad A_4^4 = 4!$

$A_3^5 = 25.3! = 150$ $\quad A_4^5 = 10.4!$ $\quad A_5^5 = 5!$

$A_3^6 = 90.3! = 540$ $\quad A_4^6 = 65.4!$ $\quad A_5^6 = 15.5!$ $\quad A_6^6 = 6!$

$A_3^7 = 301.3! = 1806$ $\quad A_4^7 = 350.4!$ $\quad A_5^7 = 140.5!$ $\quad A_6^7 = 21.6!$ $\quad A_7^7 = 7!$

$A_3^8 = 966.3! = 5796$ $\quad A_4^8 = 1701.4!$ $\quad A_5^8 = 1050.5!$ $\quad A_6^8 = 266.6!$ $\quad A_7^8 = 28.7!$ $\quad A_8^8 = 8!$

$A_3^9 = 3025.3! = 18.150$ $\quad A_4^9 = 7770.4!$ $\quad A_5^9 = 6951.5!$ $\quad A_6^9 = 2646.6!$ $\quad A_7^9 = 462.7!$ $\quad A_8^9 = 36.8!$

	xf_0^I	$x^2f_0^{II}$	$x^3f_0^{III}$	$x^4f_0^{IV}$	$x^5f_0^V$	$x^6f_0^{VI}$	$x^7f_0^{VII}$	$x^8f_0^{VIII}$	$x^9f_0^{IX}$	
a_{1i}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$xf_0^I = f_1$
a_{2i}	1 ← +	1 ← × + 2	0 × 3	0	0	0	0	0	0	$xf_0^I + x^2f_0^{II} = f_2$
a_{3i}	1 ← +	3 ← × + 2	1 ← × + 3	0 × 4	0	0	0	0	0	$xf_0^I + 3x^2f_0^{II} + x^3f_0^{III} = f_3$
a_{4i}	1 ← +	7 ← × + 2	6 ← × + 3	1 ← × + 4	0 × 5	0	0	0	0	$xf_0^I + 7x^2f_0^{II} + 6x^3f_0^{III} + x^4f_0^{IV} = f_4$
a_{5i}	1	15	25	10	1	0	0	0	0	
a_{6i}	1	31	90	65	15	1	0	0	0	
a_{7i}	1	63	301	350	140	21	1	0	0	
a_{8i}	1	127	966	1701	1050	266	28	1	0	
a_{9i}	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	

4. Nu we toch hier zijn aangeland, kunnen we het spel wel even voortzetten.
Neem

$$f = x(x-1)^2 \qquad x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x$$

$$f' = (x-1)^2 + 2x(x-1) \qquad xf' = 3x^3 - 2.2x^2 + x,\ f'(1) = 0$$

$$f'' = 4(x-1) + 2!x \qquad ,\ f'(1) = 2!$$

$$xf' + x^2 f'' = 3^2x^3 - 2.2^2x^2 + x$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$x = 1 \quad 0 \ + \ 2! = 3^2 - 2.2^2 + 1$$

$$f = x^2(x-1)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

$$g = x^2, \qquad h = (x-1)^2,$$

$$g' = 2x, \qquad h' = 2!(x-1),\ f' = g'h + h'g,\ f'(1) = 0$$

$$g'' = 2!, \qquad h'' = 2!\ , \qquad f'' = g''h + 2h'g' + h''g,\ f''(1) = 2!$$

$$xf' = 4x^4 - 2.3x^3 + 2x^2$$

$$xf' = x^2f'' = 4^2x^4 - 2.3^2x^3 + 1.2^2x^2$$

$$x = 1 \Rightarrow \quad 2! = 4^2 - 2.3^2 + 1.2^2$$

$$f = x^3(x-1)^2 = x^5 - 2x^4 + x^3$$

$$g = x^3, \qquad h = (x-1)^2$$

$$g' = 3x^2, \qquad h' = 2(x-1),\ f' = g'h + h'g,\ f'(1) = 0$$

$$g'' = 3!x^2, \quad h'' = 2!\ , \qquad f'' = g''h + 2g'h' + gh'',\ f''(1) = 2!$$

$$xf' + x^2f'' = 5^2x^5 - 2.4^2x^4 + 3^2x^3$$

$$x = 1 \Rightarrow \quad 2! = 5^2 - 2.4^2 + 3^2$$

Dus geldt: $(a+2)^2 - 2(a+1)^2 + a^2 = 2!$ want het geldt voor $a = 0, a = 1$ en $a = 2$, wat eenvoudig te controleren is.
Uitgaande van

$$(x-1)^3 \Rightarrow 3! = 3^3 - 3.2^3 + 3.1^3$$

$$x(x-1)^3 \Rightarrow 3! = 4^3 - 3.3^3 + 3.2^3 - 1$$

$$x^2(x-1)^3 \Rightarrow 3! = 5^3 - 3.4^3 + 3.3^3 - 2^3$$

$$x^3(x-1)^3 \Rightarrow 3! = 6^3 - 3.5^3 + 3.4^3 - 3^3$$

zodat $(a+3)^3 - 3(a+2)^3 + 3(a+1)^3 - a^3 = 3!$ want het geldt voor $a = 0, a = 1$, $a = 2$ en $a = 3$.
Men kan dit spel voortzetten met $(x-1)^4$, $x(x-1)^4$, $x^2(x-1)^4$, $x^3(x-1)^4$ en $x^4(x-1)^4$ en men vindt: $(a+4)^4 - 4(a+3)^4 + 6(a+2)^4 - 4(a+1)^4 + a^4 = 4!$

Algemeen: $k! = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i\, C_i^k\, (a+i)^k$.

INSPECTIE
VOORTGEZET ONDERWIJS
(v.w.o. – h.a.v.o.)

december 1973

Onderwerp:
wiskunde bij het h.a.v.o. en v.w.o.

Aan de rectoren/directeuren van
de scholen voor v.w.o./h.a.v.o.

Namens de inspectie van het algemeen voortgezet onderwijs verzoek ik u het volgende ter kennis te brengen van de docenten wiskunde die aan uw school werkzaam zijn.

I Leerplan

In overleg met het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zijn enige wijzigingen, mede op grond van enkele jaren ervaring, voorgesteld voor het rijksleerplan wiskunde.

A Het beperkte programma voor het derde leerjaar h.a.v.o. vervalt.

B In het leerplan voor het tweede, derde en vierde leerjaar v.w.o.
a vervallen de onderwerpen: ééneénduidige afbeelding (injectie), afbeelding op (surjectie), ééneénduidige afbeelding op (bijectie); vervolg transformaties: de groep van congruente transformaties, algemene definitie van congruente figuren; de groep van gelijkvormige transformaties, algemene definitie van gelijkvormige figuren;
b worden de onderwerpen functies van twee veranderlijken en niveaulijnen naar de bovenbouw bij wiskunde I verschoven;
c worden toegevoegd de onderwerpen: inleiding tot de differentiaalrekening; inleiding tot de beschrijvende statistiek; permutaties en combinaties.

C Het leerplan van het vierde leerjaar voor de B-leerlingen (wiskunde II) en het leerplan van het vijfde en zesde leerjaar voor wiskunde II worden samengevoegd. De tekst van het examenprogramma wiskunde II wordt hier als leerplan gekozen.

D De terminologie van het leerplan wordt aangepast aan de voorstellen van de Nomenclatuurcommissie.

II Nomenclatuur

De examenopgaven voor vwo/havo/mavo zullen overeenkomstig de voorstellen van de Nomenclatuurcommissie worden geredigeerd met uitzondering van een tweetal afwijkingen:

a Om technische redenen zullen voor vectoren geen vette letters gebruikt worden. Vectoren zullen aangegeven worden door een streepje boven de letter of een pijltje boven de letters.
b De symbolen $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Z}^+$ en $\mathbb{Z}^-$ zullen wel in de examenopgaven gebruikt worden. Het getal 0 is geen element van bovengenoemde verzamelingen.

III Tabellen

Bij het schriftelijk examen is het gebruik van passer, geodriehoek en rekenliniaal toegestaan. De kandidaten dienen tevens te beschikken over een logaritmentafel in ten minste vier decimalen en over goniometrische tabellen met een nauwkeurigheid van ten minste $\frac{1}{2}$ graad of 1/100 radiaal.
Voor het v.w.o.-examen zijn bovendien nodig tabellen voor ln en e-machten, in tenminste vier decimalen.

IV Normen

Met ingang van 1974 worden bindende normen geformuleerd in een schaal van 100 punten. De mogelijkheid bestaat dat niet voor elk vraagstuk evenveel punten worden toegekend, maar het onderlinge verschil in waardering zal klein gehouden worden.

V Statistiek en waarschijnlijkheidsrekening bij het v.w.o.

Met ingang van 1976 zal het examen wiskunde I tevens mathematische statistiek en waarschijnlijkheidsrekening omvatten.
Teneinde de invoering van dit examenonderdeel geleidelijk te doen geschieden heeft het College van inspecteurs besloten gebruik te maken van de mogelijkheid in het examenprogramma tijdelijk enige beperkingen aan te brengen.
In 1976, 1977 en 1978 zullen op de schriftelijke examens geen vragen gesteld worden over cyclometrische functies, partiële integratie en oneigenlijke integralen.
Bij de examens in 1976 en 1977 zal de mathematische statistiek en de waarschijnlijkheidsrekening voor een gedeelte, in 1978 geheel worden ingevoerd.
Hierover ontvangt u voor de cursus 1974-1975 nog nadere mededelingen.
Voor de examens in 1974 en 1975 is het geoorloofd bij wiskunde II als keuze onderwerp mathematische statistiek en waarschijnlijkheidsrekening te kiezen; daarna is dat niet meer mogelijk.

VI Keuze-onderwerp bij wiskunde II

Voor 1974 is toegezegd dat men het keuze-onderwerp bij wiskunde II voor één jaar tot minimaal 25 uren terug kan brengen.
Met ingang van 1975 wordt op voorstel van de C.M.L.W. er van uitgegaan dat hiervoor ten minste 40 lesuren beschikbaar gesteld worden.
Indien een onderwerp gekozen wordt dat niet voorkomt in de lijst van keuzeonderwerpen, is vooraf toestemming nodig van de inspecteur, belast met het toezicht van de school. Deze toestemming wordt na aanvrage eventueel verleend onder ten minste twee voorwaarden: men dient een vastgestelde tekst of syllabus te ge-

bruiken en na twee jaar een verslag over de resultaten aan de inspecteur toe te zenden.

VII Grafieken

Naar aanleiding van de discussies op de vergaderingen met wiskundedocenten wordt voorgesteld dat de opdracht 'Onderzoek de functie f' een onderzoek inhoudt naar:
a domein en indien mogelijk tekenschema van f(x)
b tekenschema van f'(x) en eventuele lokale extremen
c asymptotisch gedrag (bij het h.a.v.o. alleen horizontale en verticale asymptoten).
De opdracht 'Teken de grafiek' kan geschieden na onderzoek van de functie of met behulp van 'standaardgrafieken'. In het laatste geval dient aangegeven te worden hoe de gevraagde grafiek afgeleid is uit de grafiek van één van de volgende functies:

$$\sin x, \cos x, \tan x, ax + b, x^2, \frac{1}{x}, \ln x \text{ en } e^x$$ [1].

Indien bij de opdracht 'Teken in één figuur de grafieken van twee functies' de snijpunten van de grafieken van belang zijn, zal dit expliciet gevraagd worden.

VIII

Binnenkort verschijnt in 'Euclides' een verslag over de laatste vier besprekingen met docenten wiskunde, die in het najaar 1973 zijn gehouden.

Namens het College van inspecteurs
v.w.o.-h.a.v.o.

drs. W.E. de Jong
drs. B.J. Westerhof

[1] Voor have log x en 2^x.

VERSLAG VAN DE BESPREKINGEN OVER HET VAK WISKUNDE BIJ HET H.A.V.O. EN HET V.W.O.

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (N.V.v.W.) heeft in het najaar van 1973 een viertal vergaderingen georganiseerd waar het leerplan en de examenprogramma's voor het h.a.v.o. en het v.w.o. aan de orde gesteld zijn. Dit is geschied op verzoek van vele docenten, die na de voorlichtingsvergaderingen die ultimo 1972 gehouden werden, nader geïnformeerd wensten te worden over de ontwikkelingen in het wiskunde-onderwijs (zie verslag in Euclides, 48e jaargang, april 1973). Hetgeen besproken is op de vergaderingen te Eindhoven, Haarlem, Rotterdam en Zwolle zal ongetwijfeld van belang zijn voor alle wiskundedocenten, zodat een samenvattend verslag van deze vergaderingen hierna volgt.
Enkele beslissingen die genomen werden naar aanleiding van de gevoerde discussies zijn vervat in een brief van de inspectie van het algemeen voortgezet onderwijs, die toegezonden werd aan alle scholen voor v.w.o. en/of h.a.v.o. Deze brief is eveneens in Euclides opgenomen (zie blz. 221).

I Rijksleerplan

Op grond van enkele jaren ervaring zijn enige knelpunten aan het licht gekomen die in het concept-rijksleerplan aanwezig waren.
Het Bestuur van de N.V.v.W. heeft met drie inspecteurs deze knelpunten besproken. Daarna is aan het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen voorgesteld het concept-leerplan voor wiskunde op enkele punten te wijzigen.

a Het leerplan h.a.v.o. derde leerjaar met beperkt programma komt te vervallen. De behoefte aan dit beperkte programma werd bij de invoering van de Wet op het voortgezet onderwijs sterk gevoeld vanwege een continue overgang van de m.s.v.m. naar de school voor h.a.v.o.
Dit overgangsproces is inmiddels ten einde en de modernisering van het wiskunde-onderwijs in de onderbouw heeft tot gevolg dat de wiskunde minder deductief geworden is.
Bovendien is het gewenst enige distantie aan te brengen tussen het leerplan m.a.v.o.-4 en het leerplan h.a.v.o. voor de klassen 2 en 3.
Het leerplan voor het tweede leerjaar h.a.v.o. en voor het derde leerjaar h.a.v.o. (uitgebreid programma) is samengevoegd om de scholen een grotere vrijheid te geven de leerstof over beide klassen te verdelen.

b In het leerplan voor het tweede, derde en vierde leerjaar v.w.o. worden enkele wijzigingen voorgesteld die verband houden met de diensten die het vak wiskunde verleent aan andere vakken zoals natuurkunde en economie.
In het vierde leerjaar is het noodzakelijk een inleiding in de differentiaalrekening alsmede in de beschrijvende statistiek te geven.
Om ruimte te scheppen in het programma zijn enkele onderwerpen vervallen of naar de bovenbouw v.w.o. verschoven (zie brief inspectie)

c In het concept-rijksleerplan wordt voor het vak wiskunde II onderscheid gemaakt tussen de leerstof voor klasse vier enerzijds en voor de klassen vijf en zes anderzijds.
Vanwege de reductie van het gemiddelde aantal wekelijkse lessen van 34 via 32 naar 30 beperken verschillende scholen het onderwijs in het vak wiskunde II tot het vijfde en zesde leerjaar.
Het genoemde onderscheid kan derhalve niet gehandhaafd worden.
Naar analogie van de situatie bij het vak wiskunde I is gekozen voor een omschrijving van het programma voor het vak wiskunde II, die identiek is met het examenprogramma voor dit vak.
De omschrijving van de leerstof geldt nu, hetzij voor de klassen 4, 5 en 6, hetzij voor de klassen 5 en 6.
De inhoud van het programma voor het vak wiskunde II verandert in het geheel niet:
1 de eigenwaarden waren reeds uit het examenprogramma weggelaten;
2 het onderwerp 'toepassingen van de analyse' was als keuze-onderwerp al toegevoegd;
3 de kegelsneden waren niet in het examenprogramma opgenomen en kunnen derhalve zeer summier behandeld worden.

d De terminologie van het rijksleerplan wordt aangepast aan de voorstellen van de Nomenclatuurcommissie: 'transformaties' wordt 'afbeeldingen', 'lineaire vergelijkingen' wordt 'eerstegraadsvergelijkingen' etc.

II Statistiek en waarschijnlijkheidsrekening bij het v.w.o.

Op alle vergaderingen hebben docenten de wens naar voren gebracht de invoering van het onderdeel mathematische statistiek en waarschijnlijkheidsrekening bij het vak wiskunde I zeer geleidelijk in te voeren, omdat het huidige programma, speciaal voor A-leerlingen, naar hun oordeel veel al moeilijk is.
Aan deze wens is gehoor gegeven en het resultaat vindt u in de meergenoemde brief van de inspectie.
De ervaringen die momenteel worden opgedaan aan elf scholen die experimenteren met het onderdeel mathematische statistiek en waarschijnlijkheidsrekening zullen mede bepalend zijn voor de omvang van de leerstof voor dit onderdeel die bij de examens in de cursusjaren 1975/76 en 1976/77 aan de orde gesteld zal worden, en ook voor de totale omvang die vanaf het cursusjaar 1977/78 zal worden geëxamineerd
Nadere mededelingen daarvoor zullen nog volgen, zodra het experiment ten einde is.

III Normen

Met ingang van 1974 worden normen geformuleerd in een schaal met 100 punten.
Deze normen zijn bindend, hetgeen betekent dat zowel de examinator als de tweede corrector deze normen moeten hanteren.
In overleg met het bestuur van de N.V.v.W. zullen elk jaar voor elk examenwerk

12 docenten uitgenodigd worden om tezamen met de vakinspecteurs de normen op te stellen. Op deze wijze zijn er voldoende gegevens beschikbaar om tot een redelijke normering van het examenwerk te geraken. Plaatselijke of regionale groeperingen van wiskundedocenten kunnen in de waardering voor de onderdelen van het werk geen veranderingen aanbrengen.
Bij de mondelinge examens oude stijl met deskundigen en gecommitteerden van buiten de schoolwereld was de afspraak gemaakt dat elke rekenfout $\frac{1}{2}$ punt kostte. Dit gold in een systeem met in totaal 30 of 40 punten. Bij een schaal met 100 punten is dit nu geworden: 1 punt per rekenfout tot een maximum van het aantal punten dat voor dit onderdeel behaald kan worden.
Mede op verzoek van docenten zal een verfijning van de normering aangebracht worden, daar waar dit mogelijk is. Geeft een vraagstuk aanleiding tot meer dan één oplosmethode, dan is dit veelal niet mogelijk.

IV Grafieken

De afspraken die gemaakt zijn over het tekenen van een grafiek (zie brief van januari 1973, gepubliceerd in Euclides, 48e jaargang nr. 6, blz. 227 en volgende) hebben aanleiding gegeven tot enige discussies en enkele ingezonden stukken in Euclides. Om aan alle verwarring en onzekerheid een einde te maken is de volgende afspraak gemaakt, waarmee men zich op de vier vergaderingen in grote meerderheid kon verenigen.
Het tekenen van een grafiek kan op twee manieren geschieden.
Ten eerste kan de grafiek van een functie afgeleid worden uit een voor de kandidaten bekende grafiek – een z.g. standaardgrafiek – b.v. door translatie, door spiegeling, door verandering van periode enz.
Indien een kandidaat op deze wijze een tekening maakt èn daarbij vermeldt op welke wijze de getekende grafiek uit een standaardgrafiek wordt afgeleid, is zijn methode volledig verantwoord.
Ten tweede kan de grafiek van een functie getekend worden door die functie te onderzoeken. De inhoud van de opdracht 'Onderzoek de functie f' wordt in de brief van de inspectie duidelijk omschreven.
Opgemerkt dient te worden dat voor v.w.o. zowel de horizontale en verticale als de 'scheve' asymptoot van de grafiek van een functie onder het asymptotisch gedrag van de functie valt.
In ieder geval is het tekenen van een grafiek op basis van een aantal losse, zelfgekozen punten voortaan uitgesloten en zal als zodanig in de normering niet gehonoreerd worden.

V Enkele slotopmerkingen

a Het verslag van de voorlichtingsvergaderingen v.w.o.-wiskunde en het eindverslag van de Nomenclatuurcommissie die staan vermeld in Euclides, 48e jaargang nr. 8, blijven van belang voor alle docenten.
b Het woord 'bepaal' zal zoveel mogelijk vermeden worden in examenopgaven vanwege de meestal te onduidelijke opdracht die hierin voor de kandidaten op-

gesloten ligt.
Met 'bereken' wordt aangegeven een opdracht die via een becijfering of via het oplossen van een vergelijking of een ongelijkheid dient te worden uitgevoerd.

c Het begrip 'groep' behoort wel tot de verplichte leerstof van wiskunde II. Daar niet alle leerboeken dit begrip voldoende uitvoerig behandelen, zal de eerste twee jaren dit onderwerp niet expliciet op het schriftelijk examen aan de orde komen.

d Verwacht mag worden dat de eisen van de diverse studierichtingen binnen de sociale wetenschappen, wat betreft het voortentamen wiskunde I voor die v.w.o.-kandidaten die dit vak niet in hun examenpakket hebben, voor een deel milder zullen zijn dan aanvankelijk werd verwacht.
Kandidaten die een opleiding voor atheneum A of gymnasium A volgen en voor wie wiskunde I naar het oordeel van de docentenvergadering te zwaar is, kunnen beter na het behalen van het v.w.o.-diploma zich voorbereiden op een voortentamen wiskunde.

Infrarood Sterrenkunde

Het boekje met de tekst van de voordrachten die in januari en februari 1973 te Utrecht gehouden werden in de Colleges Sterrenkunde voor Afgestudeerden is thans verschenen en aan de deelnemers toegezonden.

Belangstellenden kunnen zich eveneens van toezending verzekeren door storting van *f* 3,– op gironummer 2900 van de AMRO-Bank N.V. te Utrecht, onder vermelding van nummer 40205 t.n.v. Prof. Dr. C. de Jager.

Van de voordrachten in voorgaande jaren is nog een beperkt aantal boekjes voorradig. Wilt U op uw betaalbiljet vermelden van welk jaar en welke voordrachten U een boekje wenst te ontvangen?

Vriendelijk dank voor uw medewerking.

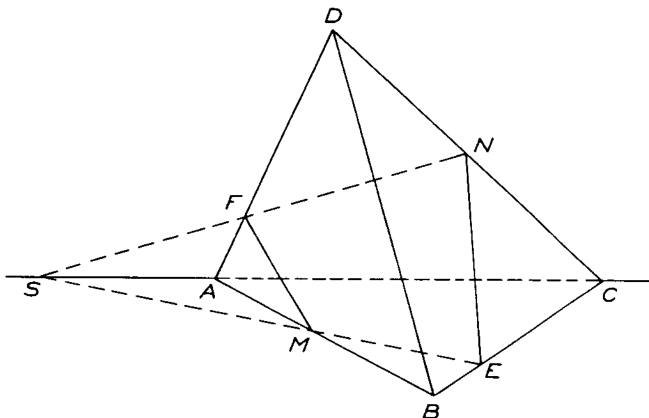
Prof. Dr. C. de Jager,
Hoogleraar/Beheerder van het
Sterrenkundig Instituut te
Utrecht

Verscheidenheden

PROF. DR. O. BOTTEMA
Delft

XC *Vergissen is menselijk*

In verschillende meer uitgebreide werken over stereometrie[1]) en ook in enkele schoolboeken komt de volgende fraaie stelling voor: *elk vlak door de middens van twee overstaande ribben van een viervlak verdeelt dit in twee stukken met gelijke inhoud.* Het bewijs wordt veelal ongeveer op de volgende wijze gegeven. Is (fig. 1) *ABCD*



het viervlak, zijn *M* en *N* de middens van *AB* en *CD* en snijdt een willekeurig vlak door *MN* de ribben *BC* en *AD* in *E* en *F*, dan zullen *ME* en *NF* elkaar in *S* op *AC* snijden. Past men in driehoek *ABC* met de snijlijn *MS* en in driehoek *ADC* met snijlijn *NS* de stelling van Menelaus toe, dan blijkt

$$\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD}, \text{ en dus } \frac{BE}{BC} = \frac{AF}{AD}. \tag{1}$$

Van de twee delen waarin het snijvlak het viervlak verdeelt is het voorste stuk de som van de piramide $P_1 = D.MENF$ en het viervlak $T_1 = D.BEM$; het andere is de som van $P_2 = C.MENF$ en $T_2 = C.AMF$. P_1 en P_2 hebben hetzelfde grondvlak en gelijke hoogten en dus dezelfde inhoud. Het viervlak $T_1 = B.EMD$ heeft met *ABCD* de drievlakshoek *B* gemeen en $T_2 = A.MFC$ de drievlakshoek *A*. Daar de inhouden van twee viervlakken met gemeenschappelijke drievlakshoek zich verhouden als de produkten der betrokken ribben, volgt met (1) dat ook T_1 en T_2 gelijke inhoud hebben.

Het theorema is afkomstig van *Bobillier* (een geometer op wiens naam ook een bekende constructie uit de vlakke kinematica staat), die het in 1827 publiceerde[2]). Wij komen hier op de stelling terug vanwege een curieus vervolg, een schijnbaar gerechtvaardigde uitbreiding, waarvan echter het bewijs op een vergissing berust. Zij werd een jaar later gegeven door *Levy*[3]) en luidt als volgt: als *M* en *N* de ribben *AB* en *DC* in dezelfde verhouding verdelen ($AM : MB = DN : NC = p : q$), dan verdeelt elk vlak door *MN* het viervlak in twee delen waarvan de inhouden

zich verhouden als $p : q$. De stelling van Bobillier betreft dan het bijzondere geval $p = q$.
Nu kan men wel dadelijk inzien dat de stelling niet juist kan zijn. Als het snijvlak om *MN* draait veranderen de stukken van gedaante, maar hun inhouden veranderen continu, ook als het snijvlak de stand *NAB,* resp. *MCD* passeert. Geeft men het snijvlak een vóór- en een achterkant, dan zou, ware de stelling juist, het aan de voorkant gelegen stuk steeds dezelfde inhoud hebben. Bij rotatie over een gestrekte hoek is het snijvlak in de beginpositie terug, maar de vóór- en de achterkant zijn verwisseld. Daaruit volgt dat de stelling hoogstens waar kan zijn voor $p = q$.
Men kan ook gemakkelijk de fout in de door Levy gegeven argumentatie aanwijzen. Wij volgen dezelfde methode als boven. Dan blijkt dat de inhouden van P_1 en P_2 zich verhouden als $DN : NC = p : q$. Past men ook nu tweemaal de stelling van Menelaus toe, dan komt er evenals boven $\frac{BE}{BC} = \frac{AF}{AD}$.
De verhouding van de inhouden van T_1 en T_2 is als

$$\frac{BE}{BC} \cdot \frac{BM}{BA} : \frac{AF}{AD} \cdot \frac{AM}{AB} = q : p.$$

De verhoudingsgetallen zijn correct, maar zij staan *in verkeerde volgorde* en daarmee vervalt de conclusie. De wens een aantrekkelijke stelling te bewijzen blijkt de vader te zijn geweest van een onjuiste gang der gedachte.
Wij mogen wel aannemen dat spoedig na 1828 een lezer van de *Correspondence* de fout in de redenering zal hebben aangewezen, die de auteur en de redactie was ontgaan. Een feit is echter dat nog lang, nog een eeuw daarna de onjuiste stelling met het toch blijkbaar wat verraderlijke schijnbewijs ons gepresenteerd is in serieuze en uitnemende geschriften.[4])
Onlangs hebben wij bij willekeurige ligging van *M* en *N* de verhouding der inhouden analytisch gevolgd als het snijvlak om *MN* roteert.[5]) Zij blijkt een gebroken kwadratische functie van de positie te zijn, continu, maar met een discontinue afgeleide als het snijvlak de bijzondere standen *NAB* en *MCD* passeert. Tenzij zowel *M* als *N* de middens van hun ribben zijn is er altijd één en slechts één vlak door *MN* dat de inhoud van het viervlak halveert.

[1]) *Molenbroek,* Leerboek der stereometrie (Groningen, 1949), 174-175; *Holzmüller,* Elemente der Stereometrie, Bnd. 2 (Leipzig, 1900), 344; *Hadamard,* Leçons de géométrie élémentaire, T. 2 (Paris, 1932), 112.

[2]) *Bobillier,* Tout plan qui passe par la droite que déterminent les milieux des arêtes opposés d'un tétraèdre, le divise en deux parties équivalentes, Correspondance mathématique et physique, T. 3 (1827), 181-182.

[3]) *Lévy,* id. T. 4 (1828), 3.

[4]) *F.G.M.,* Exercises de géométrie (Tours, Paris, 1907), 871-872; *Altshiller-Court,* Modern pure solid geometry (New York, 1935), 89.

[5]) A theorem of Bobillier on the tetrahedron, Elemente der Mathematik, *24* (1969), 6-10.

Van Miss Nura D. Turner, professor emiritus of mathematics, State University of New York, ontvingen we de opgaven van de 2e wiskunde olympiade in de Verenigde Staten.

Second U.S.A. mathematical olympiad May 1, 1973.

1 Two points, P and Q, lie in the interior of a regular tetrahedron $ABCD$ Prove that angle $PAQ < 60°$.
2 Let $\{X_n\}$ and $\{Y_n\}$ denote two sequences of integers defined as follows:

$$X_0 = 1, X_1 = 1, X_{n+1} = X_n + 2X_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
$$Y_0 = 1, Y_1 = 7, Y_{n+1} = 2Y_n + 3Y_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Thus, the first few terms of the two sequences are:

X: 1, 1, 3, 5, 11, 21, . . .
Y: 1, 7, 17, 55, 161, 487, . . .

Prove that, except for '1', there is no term which occurs in both sequences.
3 Three distinct vertices are chosen at random from the vertices of a given regular polygon of $(2n + 1)$ sides. If all such choices are equally likely, what is the probability that the center of the given polygon lies in the interior of the triangle determined by the three chosen random points?
4 Determine all the roots, real or complex, of the system of simultaneous equations

$$x + y + z = 3$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$
$$x^5 + y^5 + z^5 = 3$$

5 Show that the cube roots of three distinct prime numbers cannot be three terms (not necessarily consecutive) of an arithmetic progression.

Vragen en reacties van lezers

Het onlangs in dit tijdschrift verschenen artikel van W. Burgers[1] stelt de vraag reële lineaire transformaties

$$x^1 = A(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{1}$$

te bepalen waarbij $A^n = J$, als J de eenheidstransformatie aangeeft. Zijn methode leidt via een recurrente betrekking tot een vergelijking van de graad $(n - 1)$; zouden de wortels daarvan berekend zijn, dan kan men de coëfficienten a, b, c, d vinden. De schrijver moet zich tot enkele numerieke voorbeelden beperken.
Hieronder volgt in expliciete vorm de algemene oplossing voor willekeurige n.
Is A een transformatie met de bedoelde eigenschap dan heeft ten duidelijkste

$$A_1 = T^{-1} A\, T,$$

waarin T een willekeurige niet-singuliere transformatie voorstelt, dezelfde eigenschap.
De transformatie A heeft twee reële of toegevoegd complexe dekpunten, te bepalen uit de vergelijking $x^1 = x$.
Zijn zij reëel en verschillend dan kan men door een lineaire coördinaat-transformatie $x = Ty$ de dekpunten in $y = 0$ en $y = \infty$ plaatsen, zodat (1) wordt

$$y^1 = A_1(y) = a_1 y \tag{2}$$

Het is duidelijk dat aan $A_1{}^n = J$ alleen kan worden voldaan als $n = 1$ (met $a_1 = 1$) en als $n = 2$ (met $a_2 = -1$).
Vallen de dekpunten samen dan is er een T zodanig dat zij in $y = \infty$ terechtkomen en men heeft

$$y^1 = y + b_1 \tag{3}$$

met $b_1 \neq 0$, zodat voor geen enkele n aan de vraag kan worden voldaan.
Wij kunnen ons verder beperken tot $n > 2$ en tot toegevoegd complexe dekpunten. Er is dan een reële T die ze overvoert in $y = \pm i$. Is

$$y^1 = \frac{a_1 y + b_1}{c_1 y + d_1}, \tag{4}$$

dan moet dus

$$c_1 y^2 + (d_1 - a_1) y - b_1 = 0$$

de wortels $\pm i$ hebben, waaruit volgt met $b_1 = ka_1$:

$$y^1 = \frac{y+k}{-ky+1}, \tag{5}$$

of, als $y^1 = \tan u^1$, $y = \tan u$, $k = \tan \varphi$:

$$u^1 = u + \varphi \text{ (mod. } \pi). \qquad (6)$$

Daaruit volgt dat aan $A_1^n = \text{I}$ alleen voldaan wordt als $\tan \varphi = \tau_{mn} = \tan \frac{m\pi}{n}$, m geheel, dus als

$$A_1(y) = \frac{y + \tau_{mn}}{-\tau_{mn} y + 1} \qquad (7)$$

(7) *is een standaardvorm voor de gevraagde transformatie. De algemene is* $T^{-1} A_1 T$ *met willekeurige niet-singuliere T.*
Bij de methode van Burgers moeten de wortels van een vergelijking $p_n = 0$ worden bepaald, waarbij p_n voldoet aan $p_n - Sp_{n-1} + \Delta p_{n-2} = 0$.
Stelt men $4\Delta \cos^2 \psi = S^2$ dan blijkt $p_n = 0$ equivalent met $\sin n\psi = 0$, waarmee het verband met de boven gegeven rechtstreekse oplossing geklaard is.
Delft O. Bottema

1. W. Burgers *Sluitingen*, Euclides 49 (1973-74), 27-33.

NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Aan de commissie vaststelling opgaven

Den Haag, 22 november 1973

Met enige verbazing heeft het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren kennis genomen van uw rondschrijven van 12 juni j.l. betreffende de normen voor het onderdeel wiskunde II van het examen m.a.v.o.-4.
Nog afgezien van de wenselijkheid de normering van genoemd onderdeel te herzien, heeft vooral de motivering van de herziene normering ons erg verwonderd.
Het centraal schriftelijk werk heeft mede tot doel het niveau van het examen te bewaken. Indien echter in sommige gevallen een duidelijke discrepantie is tussen de resultaten van dit over het algemeen als zeer goed gekwalificeerd werk en de resultaten van het schoolonderzoek, dan mag o.i. worden aangenomen dat de cijfers van dat schoolonderzoek wat geflatteerd waren. Het lijkt ons dan ook niet juist dat men dan achteraf alsnog tracht door een mildere normering de cijfers van het centraal schriftelijk werk dichter bij de cijfers van het schoolonderzoek te brengen.
Het komt ons voor dat de hernormering mede is ingegeven door een aantal wel erg impulsieve reacties van enige groeperingen en personen die niet geacht kunnen worden de wiskunde-leraren te representeren. Uit de verslagen van de bijeenkomsten die we in de maanden september en oktober in elf plaatsen voor m.a.v.o.-wiskunde-leraren hebben georganiseerd is ons gebleken dat ook een zeer grote meerderheid van de daar aanwezige docenten het betreurde dat uw commissie heeft besloten aan de vraagstukken waarvoor een kandidaat een score van 15 of minder punten heeft behaald 1 of 2 punten extra toe te kennen.

Namens het bestuur van de Nederlandse
Vereniging van Wiskundeleraren.
w.g.
J. W. Maassen

Boekbespreking

Karzel, Sörensen, Windelberg, *Einführung in die Geometrie,* 208 blz., 69 figuren, Uni-Taschenbücher 184, DM 19,80; Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Het boek behandelt de grondslagen van de klassieke euclidische en hyperbolische meetkunde. Deze meetkunden vallen onder het begrip incidentieruimte. speciale incidentieruimten zijn het addiene en het projectieve vlak evenals de affiene en projectieve ruimten van willekeurige dimensie en het door toevoeging van verdere structuren verkregen euclidische en projectieve vlak. In grote lijn wordt Hilbert's Grundlagen der Geometrie gevolgd, maar de invloed van Artin's Geometric Algebra is merkbaar. Het boek is compact geschreven; daarbij vergeleken leest men Hilbert's Grundlagen als een roman. Na elke paragraaf volgen opgaven die men niet kan overslaan, daar de verdere behandeling van de theorie hierop voortbouwt.
Kennis van algebraïsche structuren wordt verondersteld; in een aanhangsel van 19 bladzijden wordt hiervan een overzicht gegeven (groepen, ringen, lichamen, afbeeldingen, lineaire algebra).
In hoofdstuk I wordt een incidentiemeetkunde van het vlak ontwikkeld. Na het affiene vlak wordt het affiene coördinatenvlak ingevoerd, terwijl in de opgaven het verband met een tweedimensionale vectorruimte wordt gelegd. Daarna worden de affiene axioma's van Desargues en Pappus besproken. In de aansluitende opgaven wordt gevraagd een aantal eigenschappen van dilataties te bewijzen, o.a. dat de groep van de translaties een normaaldeler is van de griep van de dilataties. Vervolgens wordt op de verzameling punten van een lijn in een affien vlak waarvoor de stelling van Desargues geldt een coördinatenlichaam geconstrueerd op de wijze van de Streckenrechnung van Hilbert.
Hoofdstuk II handelt over ruimtelijke incidentiemeetkunde. In projectieve en affiene ruimten met dimensie $\geqslant 3$ kan de stelling van Desargues worden bewezen; daardoor kunnen zij als vectorruimten worden beschreven.
In hoofdstuk III wordt een ordeningsstructuur ingevoerd: op een lijn zowel door een tussenrelatie $(a \mid b, c)$ welke de waarde -1 of 1 aanneemt, als door een ordeningsrelatie $\geqslant$, waarna tussen beide een verband wordt gelegd; in het vlak door een verdeling in halfvlakken met behulp van een lijn G en een tussenrelatie $(G \mid a, b)$, welke de waarde -1 of 1 aanneemt naargelang het segment a, b al dan niet een punt met G gemeen heeft. En hiermee geformuleerd exioma komt in de plaats van de exioma van Pasch dat bij Hilbert een belangrijke rol speelt. Ook wordt een continuïteitsaxioma geformuleerd, waarna de stelling volgt dat elk continu affien vlak waarvoor de stelling van Desargues geldt isomorf is met een affien coördinatenvlak over het lichaam van de reële getallen.
In hoofdstuk IV: Absolute Geometrie, wordr de congruentierelatie ingevoerd op de manier van Hilbert. Door toevoeging van een congruentiestructuur aan de incidentie- en de ordeningsstructuur wordt een absoluut vlak gedefinieerd.
Ruime aandacht wordt geschonken aan de congruentieafbeeldingen, vooral aan de spiegelingsmeetkunde. Deze laatste is echter gebaseerd op Hilbert's congruentiebegrip in tegenstelling tot wat Bachmann doet in zijn Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.
In de hoofdstukken V en VI tenslotte komen de euclidische en de hyperbolische meetkunde aan de orde.
In bovenstaande kon slechts een oppervlakkige en subjectieve indruk van de rijke inhoud van dit boek worden gegeven. Voor belangstellenden in de grondslagen van de meetkunde wordt bestudering gaarne aanbevolen.
Het zijn wel bijzonder knappe leerlingen die de auteurs op het oog hebben wanneer zij in de inleiding schrijven, dat het boek zo opgebouwd is dat het mede toegankelijk is voor geïnteresseerde leerlingen in de bovenbouw.

E.H. Schmidt

Prof. Dr. O. Bottema, *Meetkunde gewoon en anders*, Torusreeks Wolters-Noordhoff, 53 blz. *f* 7,–; ISBN 90 01 141 102.

De inhoudsopgave vermeldt: Inleiding, verplaatsingen, affiene meetkunde, affiene eigenschappen, parallelprojektie, centrale projektie, perspektiviteiten, projektieve meetkunde, de dubbelverhouding, harmonische ligging, enige projektieve stellingen, dualiteit, slotopmerkingen over affiene en projektieve meetkunde, het parallellenaxioma, inversie, hyperbolische meetkunde, afstand en hoek in de hyperbolische meetkunde, het beginsel van Klein.
Welgeteld 20 hoofdstukken. Een boekje van een ongemeen hoog soortelijk gewicht, waarmee ik bedoel, dat de schrijver kans heeft gezien om duidelijke wijze, door zich te beperken tot de absolute hoofdzaken, de lezer een indruk te geven van het meervoudsbegrip bij het substantief *meetkunde*. Zo is m.i. terecht gezwegen over de associativiteit in een groep. Gekomen op blz. 15 meende ik aanvankelijk een vergissing te ontdekken, omdat de stelling van Menelaos gewoonlijk met + 1, die van Ceva met – 1 behandeld wordt. De voor mij afwijkende definitie van deelverhouding, die de auteur woordloos hanteert, doet + 1 met – 1 wisselen, waardoor de zaak beslist vlotter leesbaar wordt.
Ook de soms aan het geestige grenzende taal bevordert die vlotte leesbaarheid. ('Het blijkt, dat de nieuwe termen *de conversatie vereenvoudigen;* ... uit de *geometrische vocabulaire verwijderd;* raadpleging van een *hyperbolisch-Euclidisch woordenboek.'* b.v. van het bij fig. 22 behorende bewijsje.
Op slechts één punt heb ik een daadwerkelijke bekorting gevonden, n.l. op blz. 38, waar de schrijver de hoektrouw bij inversie bewijst met goniometrie en via de middelpunten van cirkels. Het kan m.i. vlotter en zonder enig rekenwerk aan de lezer over te laten, met één dekcirkel en een halve rechte uit 0, of, misschien nog aardiger, met de figuur van twee zeer dicht bij elkaar liggende punten en hun inversen, door op te merken, dat deze vier de hoekpunten van een koordenvierhoek zijn. De inversie met negatieve macht heeft de auteur, als niet noodzakelijk voor het betoog, terecht onaangeroerd gelaten.
Hoewel goede wijn (waarvoor de naam van de schrijver borg staat) geen krans behoeft, aarzel ok toch niet dit kleinood een juweel te noemen. Het didaktische voordeel, dat onze leraren ik toch niet dit kleinood een juweel te noemen. Het didaktische voordeel, dat onze leraren de woorden EN ANDERS. Dit *structuurprincipe* van de didaktiek zou daardoor een bekendheid en toepassing kunnen winnen tot heil van de door ons te geven lessen.
Ik heb mij voorgenomen eens na te gaan, welke stellingen en ook welke fractie van stellingen uit de gewone ouderwetse meetkunde men moet kennen, om het hier besproken boek te kunnen begrijpen. Ik vermoed, op heel wat overbodigs te stuiten. Ook ware het te wensen, dat onderwijzers, die zich voor de akte wiskunde l.o. willen bekwamen, zo spoedig hun voorstudie dit toelaat, althans een gedeelte van Bottema's arbeid zouden verwerken. Zij en hun leerlingen zouden er wel bij varen!

J.K. Timmer

Suggesties voor verlevendiging van het wiskunde-onderwijs op de basisschool door leden van de Engelse Association of Teachers of Mathematics, van Malmberg/Van In, Den Bosch, ruim 300 blz. *f* 25,– ISBN 90 208 31623.

Een vlot leesbaar, rijk geïllustreerd boek vol nuttige deels bekende, deels nieuwe informatie dat in elke school moest liggen op een voor alle onderwijzers bereikbare plaats. Mijn indrukken geef ik hier in volgorde van lectuur, behoudens uitzonderingen.
Eerst de inhoud. Inleiding, Getalpatronen, Inductie, Plaatswaarde, Visuele voorstelling, Meten, Mozaïken, Het spijkerbord, Partities. We doen een spelletje, Open situaties, Hetzelfde of niet, Verzamelingen, alsmede Bibliografie, overzicht van materialen, register.
De vertaling uit het Engels zou hier en daar nog wat bijgeschaafd kunnen worden. Zo vind ik iets boven het midden van blz. 19 *deler,* in plaats van *deelbaar getal.*
Op blz. 272 valt op, dat de m.i. zonderlinge Engelse schrijfwijze der Romeinse cijfers is gehandhaafd ondanks de vertaling, een gewoonte die we vaker in dergelijke werken aantreffen. Op Romeinse cijfers behoren nu eenmaal geen puntjes. Men kan dus blijkbaar ook *ten onrechte* de puntjes op de i zetten. Maar het staat goed op blz. 280. In fig. 2.16 ontbreekt een zwarte stip. Verder zetten de schrijvers in de goede zin 'de puntjes op de i', b.v. op pag. 70, waar we vinden: 'De laatste jaren wint de overtuging veld, dat de kinderen tot een beter begrip van ons plaatswaarde-systeem komen, *als ze enige ervaring opdoen in het werken met andere bases dan alleen tien.*' Hier is zeer terecht het zo belangrijke structuurbeginsel van de didactiek gehanteerd, welk beginsel ons voorhoudt, dat men een geval beter begrijpt tegen de achtergrond van iets algemeners (en door specialisaties). En dit is lang niet de enige goede opmerking, die dit boek zo siert. Let ook eens op blz. 103/104, waar ongezocht wat belangstelling voor sterrekunde gewekt wordt! En let eens op de figuren van blz. 129, te zien tegen de achtergrond van die op blz. 128. Midden in de bovenste helft van blz. 139 wordt het boek gesierd door een pracht voorbeeld van de Socratische methode: men geve door een geschikte vraag het kind een heel klein 'duwtje', waarna zijn gedachtengang verder moeiteloos 'voortrolt'. Dat was bij het in elkaar zetten van lichamen uit regelmatige veelhoeken. Bijzondere aandacht verdient ook blz. 174, *tellen der ondersteuning van het begrip.* Op blz. 274 staat hierover weer zo'n fundamentele opmerking: *Hoeveel-vragen leiden vrijwel onmiddellijk tot een echt wiskundig onderzoek.*
Uit blz. 295/296 blijkt dat de schrijvers 0 niet tot de natuurlijke getallen rekenen, waarmee ik mij graag verenig.
Ik kom nu aan het inleidingshoofdstuk, dat mij de haren te berge deed rijzen, niet wegens de onhoud, waarmee ik erg sympathiseer, maar wegens de ontoepasbaarheid in ons land onder de nu heersende voor wiskunde ongunstige omstandigheden. Wat weet een onderwijzer, die zijn studie begonnen is met een HAVO-diploma zonder wiskunde en die ook verder dit vak zo veel mogelijk de rug toegekeerd heeft van ons mooie vak? Hij is zeker NIET IN STAAT de vele goede suggesties uit dit boek waar te maken. Als remedie zouden onze P.A.'s veel strengere toelatingseisen moeten stellen in wiskunde, verder dit vak NIET IN MINDERE MATE VERPLICHT STELLEN DAN NEDERLANDS, en, als dit niet gaat of niet helpt, dan zou via salarisdifferentiatie de Regering moeten zorgen, dat het evenwicht hersteld wordt. Het gaat niet aan, dat de Regering enerzijds veel geld uitgeeft voor verbetering van het wiskunde-onderwijs, anderzijds nalaat, maatregelen te treffen, die de belemmering van de uitvoering opheffen. Daarom zie ik dit boek graag gebracht onder de aandacht niet alleen van onderwijzers, maar ook onder die van herscholingscursusleiders, directeuren P.A., de daarover gaande inspectie, tot in de hoogste regionen van de Regering.

J.K. Timmer

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaersheuvel 73, Oosterbeek.

308 In de vakantie vond ik in Frankrijk een boekje met '100 jeux logiques' (Livre de Poche). Veel schokkends bevatte het niet, maar een tweetal opgaven zijn voor Euclides misschien toch wel de moeite waard.
Op een familiereünie waren aanwezig een vader, een moeder, een oom, een tante, een zoon, een dochter, een neef (cousin), een neef (neveu), een nicht (cousine) en een nicht (nieve). Hoeveel mensen waren er minstens aanwezig?
Bij het oplossen heb ik getracht broer en zuster met elkaar te laten trouwen. Dit bleek echter niet de bedoeling van de degelijke Fransen te zijn. Incest is dus verboden.

309 Vijf wethouders zitten om een ronde tafel. Zij moeten uit hun midden een burgemeester kiezen. De stemming verloopt zo, dat algemeen geldt: A stemt op diegene die op de linkerbuurman van A stemt. Hoe liep het af?
Wie de vraag opgelost heeft, kan proberen generalisaties te bedenken. B.v. het aantal wethouders is n. Of het aantal is n en A stemt op degeen die stemt op degeen die twee plaatsen links van hem af zit. Is er een oplossing en is deze eenduidig? Alleen van de vraag uit de vorige alinea zal het antwoord opgenomen worden.

Oplossingen

306 Ter oriëntatie kiezen we $a = 2649$ en $p = 10$.
De som van de cijfers van a is 21, dus $a_1 = 21$. En dus $a_2 = 3$, waarmee het proces stopt. Duidelijk is, dat het eindresultaat gelijk is aan de rest van 2649 bij deling door 9.
Algemeen vinden we zo, dat het eindresultaat is de rest van a bij deling door $p - 1$.
Omdat 3948000 = 1974 . 2000, is de rest van 3948000 bij deling door 1999 gelijk aan 1974. Waarmee de redactie gaarne de lezers van Euclides een goed nieuwjaar wenst.

307 Van n positief gehele, verschillende getallen is de som s; de getallen zijn alle $\leqslant p$. Bepaal de getallen zo, dat hun produkt minimaal is.
Kies de getallen zo, dat aan de beginvoorwaarden voldaan is. Maak een van de getallen 1 kleiner en een van de getallen 1 groter, maar zorg dat ze verschillend en $\leqslant p$ blijven. Het produkt neemt dan af. Ga hiermee door, totdat de bewerking niet meer uitgevoerd kan worden. We houden dan over een suite van de vorm

$$1, 2, 3, \ldots, m, a, p - n, \ldots, p - 2, p - 1, p.$$

Deze voldoet.
Gemakkelijk is in te zien, dat het eindresultaat eenduidig bepaald is.
Uitvoering:

$$n = 10, s = 200, p = 50.$$

Schrijf achter elkaar de getallen

$$1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, \ldots, 1 + 2 + 3 + \ldots + 8$$

en daaronder in omgekeerde volgorde 50, 50 + 49, 50 + 49 + 48, . . ., 50 + 49 + 48 + . . . + 43:

1	3	6	10	15	21	28	36
372	329	285	240	194	147	99	50
			som	209	168		

209 is te veel; 168 is 32 te weinig. We vinden dus

1, 2, 3, 4, 5, 6, 32, 48, 49, 50; produkt 270950400

$n = 5, s = 60, p = 47.$

Dit levert 1, 2, 3, 7, 47. Produkt 1974.

Mededelingen

Colleges Sterrenkunde Voor Afgestudeerden, 1974.

In het kader van de Colleges sterrenkunde voor afgestudeerden, die jaarlijks door het Sterrenkundig Instituut te Utrecht worden georganiseerd zal de volgende cursus gewijd zijn aan het onderwerp;

Onderzoek met de Westerbork Synthese Radiotelescoop

De volgende voordrachten zullen worden gehouden; steeds van 19.30 tot 21.15 uur, met een kwartier pauze:

Donderdag 24 januari: dr. E. Raimond: het instrument, de waarnemingstechnieken en reductie van de gegevens.

Donderdag 31 januari: dr. L. Braes: Radio-bronnen in het Melkwegstelsel

Donderdag 7 februari: dr. H. van Woerden: Radiostraling van Normale Sterrenstelsels.

Donderdag 14 februari: Prof. dr. H. van der Laan: Radiostelsels en quasars.

Evenals vorig jaar zullen de voordrachten gehouden worden in een van de gerieflijke zalen van het *Jaarbeurs-congrescentrum* (Beatrix gebouw) aan de Croeselaan (naast het Jaarbeursplein) te Utrecht. Voor wie per trein komt is dit direct te bereiken via de traverse over het station. Aan het eind van de traverse ga men naar links (Beatrix gebouw), de trap af naar de hal, waar de receptionist U verder zal helpen.

Voor wie per auto komt: er is een ruime parkeergarage aan het Jaarbeursplein, tegenover het Beatrixgebouw.

Men kan zich opgeven bij:

Secretariaat,
Sterrenkundig Instituut
Beneluxlaan 21,
Utrecht

C. de Jager

BERICHT van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde-Onderwijs

Enkele in de afgelopen jaren door het IOWO uitgevoerde experimenten worden binnenkort afgesloten.
De voor die experimenten ontwikkelde teksten wil het IOWO graag in een meer definitieve vorm ter beschikking van het onderwijs stellen.
Voorlopig gaat het om de volgende boeken:

VWO 1: *'Statistiek en Kansrekening voor het vwo (1973)'* door A.D. Nijdam e.a.
Bestemd voor de bovenbouw van het vwo en bruikbaar voor het onderdeel Statistiek in wiskunde 1. Het boek is in deze versie (de oranje uitvoering) direkt leverbaar. Prijs inclusief tabellenboekje en verzendkosten: *zes gulden.*
VWO 2: *'Kanttekeningen bij Statistiek en Kansrekening voor het vwo (1973)'*
Een handleiding voor leraren die voor hun leerlingen het boek VWO 1 gebruiken.
Inhoud: A. Antwoorden bij de leerlingentekst.
B. 1. Lessuggesties.
2. Voorbeelden voor transparanten (120 stuks).
3. Extra opgaven.
C. Leerlingenpraktika (7 stuks) voor 1, 2 of 3 lessen. Deze kunnen dienen als inleiding op de stof of als aanvulling.
D. Achtergrondbeschouwingen die iets dieper op de stof of motivatie ingaan.
E. Beschrijving van het experiment S. en W. 1969-1973.
F. Errata.
G. Literatuurlijst voor leerling en leraar.

Dit 300 bladzijden tellend geheel is eind januari 1974 leverbaar voor de prijs van *twaalf gulden.*
VWO 3: *'Kanttekeningen bij Statistiek en Kansrekening voor het vwo (1974)'*
Een voor 'VWO 1' aangepaste versie van 'VWO 2'.
In juni 1974 beschikbaar eveneens voor *twaalf gulden.*
VWO 4: *'Projectieve meetkunde'* door H. Freudenthal en G.A. Vonk.
Een eveneens voor keuze-onderwerp in wiskunde 2 bedoeld boekje, dat direkt leverbaar is voor *vier gulden* per stuk.
VWO 5: *'Numerieke wiskunde'* door G.A. Vonk.
Nog in produktie als keuze-onderwerp wiskunde 2.
Leverbaar voor het begin van het nieuwe schooljaar voor *vijf gulden* per stuk.
VWO 6: *'Docentenboek Computerkunde'* door G.A. Vonk.
Handleiding en naslagwerk voor de docent in het experiment computerkunde.
Prijs: *vijf gulden.*

De boeken vwo 1, 2, 3, 4, 5 en 6 kunnen *uitsluitend rechtstreeks en niet via de boekhandel* besteld worden door middel van een daartoe bestemd formulier 'vwo 1974', dat op aanvraag verkrijgbaar is bij het I.O.W.O., Tiberdreef 4, Utrecht, tel. 030–611611.
Van deze door het IOWO verzorgde boeken worden geen presentexemplaren verstrekt.

VWO 7: *'Statistiek en Kansrekening voor het vwo (1974)'* door A.D. Nijdam e.a.
Een herziene uitgave van het boek VWO 1.
(Dit boek kan moeilijk naast VWO 1 gebruikt worden).
VWO 8: *'Complexe Getallen'* door H. Freudenthal en G.A. Vonk.
Een herziene uitgave, die voldoende stof biedt voor het keuze-onderwerp in wiskunde 2.
VWO 9: *'Werkschrift Computerkunde'* door G.A. Vonk.
In dit werkschrift wordt in eenvoudige vorm de kern van de leerstof in het experiment computerkunde weergegeven.
De uitvoering leent zich uitstekend voor individueel werk.
Er wordt een zeer eenvoudige programmeertaal aangeleerd, waarna door eigen ervaring met enkele grote computertoepassingen wordt kennis gemaakt.
Geschikt voor alle scholen voor voortgezet onderwijs.
De boeken vwo 7, 8 en 9 kunnen (eventueel via de boekhandel) besteld worden op een bestelformulier, dat op aanvraag wordt toegezonden door: Stichting IVIO, Maerlanthuis, Lelystad, tel. 03200–26514.
De prijzen en leverdata van de bij IVIO te bestellen boeken worden op de bestelkaart meegedeeld.

Over inhoudelijke aspekten van alle in deze mededeling genoemde boeken kunt U informatie vragen aan het I.O.W.O.; Tiberdreef 4 te Utrecht; tel. 030–611611

Internationale post-universitaire cursussen.

De Internationale Post-Universitaire cursussen 1974 zullen eens te meer talrijke leerkrachten uit vele landen te Gent samenbrengen.
Deze jaarlijkse cursussen, ingericht door de Belgische regering met medewerking van de universitaire autoriteiten, zullen plaats hebben in de Rijksuniversiteit te Gent van 19 tot 23 augustus 1974, en opnieuw de volgende vier secties omvatten: wiskunde, natuurkunde, chemie en biologie.
Zij richten zich in de eerste plaats tot de leerkrachten van het secundair onderwijs, zowel als tot de jonge universitaire afgestudeerden, met een informatiecyclus over de meest actuele interessepunten uit hun vak. Voor 1974 werd als thema voor de sectie wiskunde *'de moderne geometrie'* gekozen, terwijl de andere drie secties als algemeen thema de *'Wetenschappen van de ruimte'* zullen behandelen. Alle lessen worden gegeven door vooraanstaande universiteitsprofessoren uit de verschillende Europese landen, zodat de cursussen een vernieuwd kontakt met het universitaire leven en de recente wetenschappelijke oriëntatie en evolutie betekent. Tevens is er de traditionele reeks van culturele en sociale manifestaties, die steeds op succesvolle wijze bijgedragen heeft tot het scheppen van de geest van samenwerking, internationale contactname en vriendschap, die van deze cursussen iets speciaals maken.
De inrichters drukken daarom de wens uit dat de 'Internationale post-universitaire cursussen 1974' voor velen een gelegenheid moge zijn tot professionele volmaking, culturele verrijking en verruimde kennismaking met talrijke vakgenoten over de eigen landsgrenzen.
Alle verdere inlichtingen: Secretariaat van de Internationale post-universitaire cursussen, Postbus 24, 1000 Brussel 29.

Amerikaanse assistentschappen in wiskunde
Academisch jaar 1974-75

De *Wayne State University, Department of Mathematics,* te Detroit, Michigan in de Verenigde Staten biedt enkele teaching assistantships in de wiskunde aan. Dit houdt een verplichting van maximaal 6 uur lesgeven per week in met een salaris van ruim $ 3300, waarvan collegegeld en levensonderhoud bekostigd kunnen worden. Verlenging is mogelijk voor het behalen van een master's of doctor's graad.
Een doctor's graad (Ph.D.) kan behaald worden in de volgende specialisaties van wiskunde:

Algebra	Functional Analysis
Abelian Groups	Surface Area
Finite-Groups	Point Set Topology
Real Analysis	Algebraic Topology
Complex Analysis	Probability
Harmonic Analysis	Mathematical Statistics
Differential Equations	Applied Mathematics
Differential Geometry	Computer Science
	Graph Theory

In aanmerking komen *goede* studenten, die bij voorkeur hun doctoraal studie voor de zomer 1974 voltooid zullen hebben.
Van sollicitanten wordt verwacht een goede kennis van de Engelse taal te hebben.
Nadere inlichtingen en formulieren, onder opgave van opleiding en leeftijd zo spoedig mogelijk, maar niet later dan 1 maart 1974 aan te vragen bij het Nederland-Amerika Instituut, Afdeling Studievoorlichting, Prinsengracht 919 te Amsterdam. Telefoon: 020–239425.

INHOUD